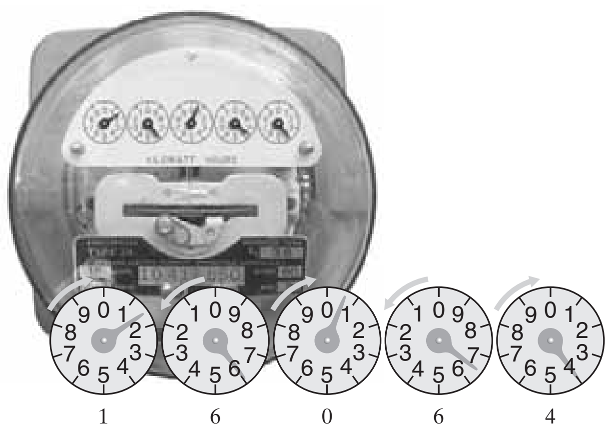
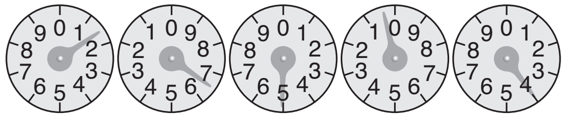


Fuente: Southern California Edison, Understanding Your Electricity Bill

Suponga que la lectura del mes anterior es la que se muestra a la izquierda, y que la de este mes es la siguiente.



a) Determine la lectura para este mes.

b) Determine el costo de la electricidad para este mes, primero con la resta de la lectura del mes anterior de la del actual (se mide en kilowatt-hora), y después multiplique la diferencia por el costo por kilowatt-hora de electricidad. Suponga que la electricidad cuesta 24.3 centavos por kilowatt-hora.

1.3 FRACCIONES

1. Conocer los símbolos de la multiplicación e identificar los factores.
2. Reducir fracciones.
3. Multiplicar fracciones.
4. Dividir fracciones.
5. Sumar y restar fracciones.
6. Convertir números mixtos a fracciones, y viceversa.

Con frecuencia, los estudiantes que cursan álgebra por primera vez preguntan "¿cuál es la diferencia entre la aritmética y el álgebra?". Al hacer aritmética, se conocen todas las cantidades que se usan en los cálculos. Sin embargo, en álgebra hay una o más cantidades que se desconocen y deben calcularse.

EJEMPLO 1 **Harina necesaria para una receta** Una receta requiere 3 tazas, la señora Clark tiene dos. ¿Cuántas tazas más necesita?

Solución La respuesta es 1 taza.

Aunque es muy elemental, éste es un ejemplo de problema algebraico. La cantidad desconocida es el número de tazas adicionales de harina necesarias.

Para tener éxito en álgebra es esencial entender los números decimales (vea el apéndice A) y las fracciones. Usted debe saber cómo simplificar una fracción y sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. En esta sección revisaremos estos temas. También explicaremos el significado de los factores.

1 Conocer los símbolos de la multiplicación e identificar los factores

Con frecuencia, en álgebra utilizamos letras llamadas **variables** para representar a los números. Las letras que más se utilizan como variables son x, y y z, pero también pueden emplearse otras letras. Por lo general, las variables se escriben con cursivas. Por ello no hay confusión entre la variable x y el signo de multiplicación, aunque por lo general se emplea notación diferente para indicar una multiplicación.

Símbolos de multiplicación

Si a y b representan dos cantidades matemáticas cualesquiera, entonces podemos utilizar cada una de las siguientes expresiones para indicar el producto de a y b ("a por b").

$$ab \quad a \cdot b \quad a(b) \quad (a)b \quad (a)(b)$$

Ejemplos

3 por 4 se escribe:	3 por x se escribe:	x por y se escribe:
	$3x$	xy
$3(4)$	$3(x)$	$x(y)$
$(3)4$	$(3)x$	$(x)y$
$(3)(4)$	$(3)(x)$	$(x)(y)$

Ahora introduciremos el término *factores*, que emplearemos en todo el libro. A continuación se define factores.

DEFINICIÓN

Los números o variables multiplicados en un problema de multiplicación se llaman **factores**.

Si $a \cdot b = c$, entonces a y b son *factores* de c.

Por ejemplo, en $3 \cdot 5 = 15$, los números 3 y 5 son factores del producto 15. En $2 \cdot 15 = 30$, los números 2 y 15 son factores del producto 30. Observe que 30 tiene otros muchos factores. Como $5 \cdot 6 = 30$, los números 5 y 6 también son factores de 30. Debido a que $3x$ significa 3 por x, tanto 3 como x son factores de $3x$.

2 Reducir fracciones

Ahora tenemos la información necesaria para analizar las **fracciones**. El número que está en la parte superior de una fracción se llama **numerador**, y el que está en la parte inferior recibe el nombre de **denominador**. En la fracción $\frac{3}{5}$, 3 es el numerador y 5 el denominador.

SUGERENCIA

Considere la fracción $\frac{3}{5}$. Hay métodos equivalentes para expresarla, como se ilustra a continuación.

$$\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 5\overline{)3}$$

En general, $\frac{a}{b} = a \div b = b\overline{)a}$

Ahora se estudiará cómo simplificar una fracción.

Una fracción se **simplifica** (o **reduce a su mínima expresión**) cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1. Para simplificar una fracción, siga estos pasos.

Para simplificar una fracción

1. Determine el número mayor que dividida (sin residuo) tanto al numerador como al denominador. Este número se llama **máximo común divisor** (MCD).
2. Después, divida tanto el numerador como el denominador entre el máximo común divisor.

Si no recuerda cómo encontrar el máximo común divisor de dos o más números, lea el apéndice B.

EJEMPLO 2 Simplifique **a)** $\frac{10}{25}$ **b)** $\frac{6}{18}$.

Solución **a)** El número más grande que divide tanto a 10 como a 25 es 5. Por tanto, 5 es el máximo común divisor. Dividamos tanto el numerador como el denominador entre 5 para simplificar la fracción en su mínima expresión.

$$\frac{10}{25} = \frac{10 \div 5}{25 \div 5} = \frac{2}{5}$$

b) Tanto 6 como 18 se dividen entre 1, 2, 3 y 6. El mayor de estos números es 6, por tanto es el máximo común divisor. Divida tanto el numerador como el denominador entre 6.

$$\frac{6}{18} = \frac{6 \div 6}{18 \div 6} = \frac{1}{3}$$

Observe en el ejemplo 2b) que tanto el numerador como el denominador podrían haberse escrito como un producto con un factor común (6). Entonces, el factor común 6 podría eliminarse.

$$\frac{6}{18} = \frac{1 \cdot \cancel{6}}{3 \cdot \cancel{6}} = \frac{1}{3}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 23

Al trabajar con fracciones debe reducir las respuestas a su mínima expresión.

3 Multiplicar fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones, multiplique sus numeradores y después sus denominadores.

Multiplicación de fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

EJEMPLO 3 Multiplique $\frac{3}{13}$ por $\frac{5}{11}$.

Solución

$$\frac{3}{13} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 5}{13 \cdot 11} = \frac{15}{143}$$

Para evitar tener que simplificar respuestas, es necesario que antes de multiplicar fracciones divida tanto el numerador como el denominador entre el máximo común divisor.

EJEMPLO 4 Multiplique **a)** $\frac{8}{17} \cdot \frac{5}{16}$ **b)** $\frac{27}{40} \cdot \frac{16}{9}$.

Solución **a)** Debido a que el numerador 8 y el denominador 16 son divisibles entre el máximo común divisor 8, primero se divide entre 8 y después se multiplica.

$$\frac{8}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{17} \cdot \frac{5}{\underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{1 \cdot 5}{17 \cdot 2} = \frac{5}{34}$$

b)
$$\frac{27}{40}\cdot\frac{16}{9} = \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{40}\cdot\frac{16}{\underset{1}{\cancel{9}}}$$ *Se divide tanto 27 como 9 entre 9.*

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{5}{\cancel{40}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{9}}}$$ *Se divide tanto 40 como 16 entre 8.*

$$= \frac{3\cdot 2}{5\cdot 1} = \frac{6}{5}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 51

Los números 0, 1, 2, 3, 4, . . . son llamados **enteros no negativos**. Los tres puntos después del 4, que se denominan *elipsis*, indican que los enteros no negativos continúan en forma indefinida de la misma manera. Por tanto, los números 468 y 5043 también son enteros no negativos. En la sección 1.4 analizaremos los enteros no negativos. Para multiplicar un entero no negativo por una fracción, se escribe el entero no negativo con el denominador de 1 y realice la multiplicación.

EJEMPLO 5 **Motor de una podadora** Ciertos motores operan con una mezcla de gasolina y aceite. El motor de una podadora en particular requiere de una mezcla de $\frac{5}{64}$ de galón de aceite por cada galón de gasolina que utiliza. Una compañía de jardinería quiere elaborar una mezcla para este motor empleando 12 galones de gasolina. ¿Cuánto aceite debe utilizar?

Solución Para determinar la cantidad de aceite por usar debe multiplicarse 12 por $\frac{5}{64}$. En primer lugar, se escribe 12 como $\frac{12}{1}$, y después se divide tanto 12 como 64 entre su máximo común divisor, 4, como sigue.

$$12\cdot\frac{5}{64} = \frac{12}{1}\cdot\frac{5}{64} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{1}\cdot\frac{5}{\underset{16}{\cancel{64}}} = \frac{3\cdot 5}{1\cdot 16} = \frac{15}{16}$$

Así, para elaborar la mezcla apropiada hay que agregar $\frac{15}{16}$ de galón de aceite a los 12 galones de gasolina.

4 Dividir fracciones

Para dividir una fracción entre otra, invierta el divisor (la segunda fracción, si es que está escrita con el signo ÷) y proceda como en la multiplicación.

Para dividir fracciones

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

En ocasiones, en lugar de pedir la respuesta de un problema sumando, restando, multiplicando o dividiendo, se puede solicitar la evaluación de una expresión. **Evaluar** una expresión significa obtener la respuesta al problema por medio de las operaciones dadas.

EJEMPLO 6 Evaluar **a)** $\frac{3}{5}\div\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{3}{8}\div 12$.

Solución **a)** $\frac{3}{5}\div\frac{5}{6} = \frac{3}{5}\cdot\frac{6}{5} = \frac{3\cdot 6}{5\cdot 5} = \frac{18}{25}$

b) Escribir 12 como $\frac{12}{1}$. Después, invertir el divisor y multiplicar.

$$\frac{3}{8} \div 12 = \frac{3}{8} \div \frac{12}{1} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{8} \cdot \frac{1}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{1}{32}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 59

5 Sumar y restar fracciones

Sólo se pueden sumar o restar las fracciones que tienen el mismo denominador (un denominador común). Para sumar (o restar) fracciones con el mismo denominador, sume (o reste) los numeradores y conserve dicho denominador.

Suma y resta de fracciones

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

EJEMPLO 7 Evaluemos **a)** $\frac{6}{15} + \frac{2}{15}$ **b)** $\frac{8}{13} - \frac{5}{13}$

Solución **a)** $\frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6+2}{15} = \frac{8}{15}$ **b)** $\frac{8}{13} - \frac{5}{13} = \frac{8-5}{13} = \frac{3}{13}$

Para sumar (o restar) fracciones con denominadores diferentes, primero debemos reescribir dichas fracciones con el mismo, o común, denominador. El número más pequeño que es divisible entre dos o más denominadores se llama **mínimo común denominador** o **mcd [que es el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores diferentes]**. *Si ha olvidado cómo encontrar el mínimo común denominador, revise el apéndice B.*

EJEMPLO 8 Sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

Solución No podemos sumar estas fracciones hasta escribirlas con un denominador común. Como el menor número divisible entre 2 como entre 5 (sin que haya residuo) es 10, primero reescribamos ambas fracciones con el mínimo común denominador, que es 10.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10} \quad \text{y} \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{10}$$

Ahora se suma.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

Observe que al multiplicar tanto el numerador como el denominador por el mismo número es lo mismo que multiplicar por 1. Por ello, el valor de la fracción no cambia.

EJEMPLO 9 ¿Qué tanto es más grande $\frac{3}{4}$ de pulgada que $\frac{2}{3}$ de pulgada?

Solución Para saber qué tanto más grande, se necesita restar $\frac{2}{3}$ de pulgada de $\frac{3}{4}$ de pulgada.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$$

El mínimo común denominador es 12. Por tanto, reescribamos ambas fracciones con un denominador igual a 12.

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{9}{12} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4} = \frac{8}{12}$$

Ahora, se resta.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 75

Por tanto, $\frac{3}{4}$ de pulgada es $\frac{1}{12}$ de pulgada mayor que $\frac{2}{3}$ de pulgada.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Es importante darse cuenta de que la cancelación de un factor común en el numerador de una fracción y en el denominador de otra fracción diferente, sólo puede llevarse a cabo cuando se multiplican fracciones. *No es posible realizar dicho proceso cuando se suman o restan fracciones.*

PROBLEMAS CORRECTOS DE MULTIPLICACIÓN	PROBLEMAS INCORRECTOS DE SUMA
$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5}\cdot\frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}$	$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5}+\frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}$
$\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 3}{\underset{1}{\cancel{4}}}$	$\frac{\overset{2}{\cancel{8}}+3}{\underset{1}{\cancel{4}}}$

6 Convertir números mixtos a fracciones, y viceversa

Considere el número $5\frac{2}{3}$. Éste es un ejemplo de **número mixto**. Un número mixto consta de un entero no negativo seguido de una fracción. El número mixto $5\frac{2}{3}$ significa $5 + \frac{2}{3}$. El número mixto $5\frac{2}{3}$ puede cambiarse a una fracción de la siguiente manera:

$$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{15+2}{3} = \frac{17}{3}$$

Note que expresamos el entero no negativo, 5, como una fracción con denominador 3, y entonces sumamos las fracciones.

EJEMPLO 10 Cambiar $7\frac{3}{8}$ a fracción.

Solución

$$7\frac{3}{8} = 7 + \frac{3}{8} = \frac{56}{8} + \frac{3}{8} = \frac{56+3}{8} = \frac{59}{8}$$

Ahora, considere la fracción $\frac{17}{3}$. Esta fracción se convierte a un número mixto, como sigue:

$$\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$$

Observe que se escribió $\frac{17}{3}$ como la suma de dos fracciones, cada una con el denominador de 3. La primera fracción que se suma es el equivalente del entero más grande que es menor de $\frac{17}{3}$.

EJEMPLO 11 Cambiar $\frac{43}{6}$ a un número mixto.

Solución

$$\frac{43}{6} = \frac{42}{6} + \frac{1}{6} = 7 + \frac{1}{6} = 7\frac{1}{6}$$

SUGERENCIA

Observe que en el ejemplo 11, la fracción $\frac{43}{6}$ es una fracción simplificada debido a que el máximo común divisor del numerador y del denominador es 1. No hay que confundir la simplificación de una fracción con el cambio de una fracción con valor mayor que 1 a un número mixto. La fracción $\frac{43}{6}$ puede convertirse al número mixto $7\frac{1}{6}$. Sin embargo, $\frac{43}{6}$ es una fracción simplificada.

Ahora, se resolverán ejemplos que contienen números mixtos.

EJEMPLO 12

Plomería Para reparar una fuga en un tubo, se pega un acoplamiento de $\frac{1}{2}$ pulgada de largo a un tubo de plástico que mide $2\frac{9}{16}$ pulgadas de largo. ¿Cuál es el largo de la combinación? Vea la figura 1.4.

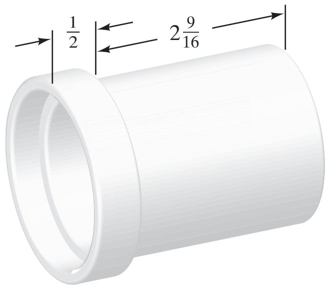


FIGURA 1.4

Solución

Entender y traducir Es necesario sumar $2\frac{9}{16}$ pulgadas más $\frac{1}{2}$ pulgada para obtener las longitudes combinadas. Se colocarán los dos números uno sobre el otro. Después de que se escriban las dos fracciones con un denominador común, se sumará.

Calcular

$$\begin{array}{r} 2\dfrac{9}{16} \\ +\ \dfrac{1}{2} \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2\dfrac{9}{16} \\ +\ \dfrac{8}{16} \\ \hline 2\dfrac{17}{16} \end{array}$$

Como $2\frac{17}{16} = 2 + \frac{17}{16} = 2 + 1\frac{1}{16} = 3\frac{1}{16}$, la suma es $3\frac{1}{16}$.

Revisar y responder La respuesta parece razonable. Así, la longitud total es de $3\frac{1}{16}$ pulgadas. ✺

EJEMPLO 13

Crecer más La gráfica de la figura 1.5 muestra la altura de Kelly el 1 de enero de 2002 y el 1 de enero de 2003. ¿Cuánto creció Kelly durante ese lapso?

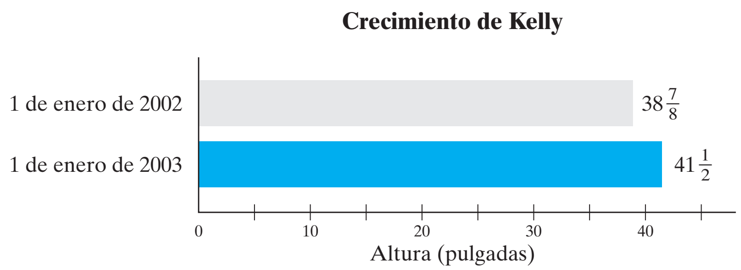


FIGURA 1.5

Solución

Entender y traducir Para encontrar el crecimiento, es necesario restar la altura del 1 de enero de 2002 de la del 1 de enero de 2003; la resta se hará en forma vertical.

Calcular

$$\begin{array}{r} 41\dfrac{1}{2} \\ -38\dfrac{7}{8} \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 41\dfrac{4}{8} \\ -38\dfrac{7}{8} \\ \hline \end{array}$$

Problemas de reto

107. Sume o reste las siguientes fracciones por medio de la regla que se estudió en esta sección. Su respuesta debe consistir en una sola fracción, y contener los símbolos que se dan en el ejercicio.

a) $\frac{*}{a} + \frac{?}{a}$ **b)** $\frac{\odot}{?} - \frac{\square}{?}$

c) $\frac{\triangle}{\square} + \frac{4}{\square}$ **d)** $\frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

e) $\frac{12}{x} - \frac{4}{x}$

108. Multiplique las siguientes fracciones por medio de la regla que se estudió en esta sección. La respuesta debe consistir en una sola fracción y contener los símbolos que se dan en el ejercicio.

a) $\frac{\triangle}{a} \cdot \frac{\square}{b}$ **b)** $\frac{6}{3} \cdot \frac{\triangle}{\square}$

c) $\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}$ **d)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{y}$

e) $\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{y}$

109. ***Dosis de medicina*** Una píldora de alopurina viene en dosis de 300 miligramos. La Dra. Highland quiere que una paciente corte las píldoras a la mitad y tome $\frac{1}{2}$ píldora tres veces al día para que consuma 450 miligramos cada día. Si quiere prescribir píldoras suficientes para un periodo de 6 meses (suponga 30 días por mes), ¿cuántas píldoras debe prescribir?

Actividad en grupo

Estudie y responda en grupo el ejercicio 110.

110. ***Papas*** La siguiente tabla da la cantidad de cada ingrediente que se recomienda para obtener 2, 4 y 8 porciones de puré de papas instantáneo.

Porciones	**2**	**4**	**8**
Agua	$\frac{2}{3}$ de taza	$1\frac{1}{3}$ taza	$2\frac{2}{3}$ tazas
Leche	2 tazas	$\frac{1}{3}$ de taza	$\frac{2}{3}$ de taza
Mantequilla*	1 taza	2 tazas	4 tazas
Sal†	$\frac{1}{4}$ de taza	$\frac{1}{2}$ taza	1 taza
Hojuelas de papa	$\frac{2}{3}$ de taza	$1\frac{1}{3}$ taza	$2\frac{2}{3}$ tazas

* O margarina.

† Si lo desea, utilice menos sal.

Determine la cantidad de hojuelas de papa y la leche que se necesita para hacer 6 porciones con los diferentes métodos que se describen. Al trabajar con la leche considere que 16 cucharadas soperas = 1 taza.

a) Miembro 1 del grupo: determine la cantidad de hojuelas de papa y leche necesarias para elaborar 6 porciones; multiplique por 3 las cantidades para 2 porciones.

b) Miembro 2 del grupo: determine las cantidades, por medio de una suma, es decir, sume las cantidades necesarias para dos porciones a las cantidades necesarias para 4 porciones.

c) Miembro 3 del grupo: Calcule las cantidades mediante el promedio (media) de 4 y 8 porciones.

d) Como grupo, determinen la cantidad restando la cantidad para 2 porciones de la cantidad que se utiliza para 8 porciones.

e) Como grupo, comparen sus respuestas de los incisos **a)** al **d)**. ¿Son las mismas? Si no lo fueran, ¿podrían explicar por qué? (Esto tal vez sea un tanto rebuscado.)

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.1] **111.** ¿Cuál es el nombre y las horas de oficina de su profesor?

[1.2] **112.** ¿Cuál es la media de 9, 8, 15, 32, 16?

113. ¿Cuál es la mediana de 9, 8, 15, 32, 16?

[1.3] **114.** ¿Qué son las variables?

1.4 EL SISTEMA DE NÚMEROS REALES

1 Identificar conjuntos de números.

2 Conocer la estructura de los números reales.

En este libro de texto hablaremos y utilizaremos diversos tipos de números. Esta sección, que presenta algunos de esos números y la estructura del sistema de números reales, es un rápido vistazo.

1 Identificar conjuntos de números

Un **conjunto** es una colección de **elementos** enumerados entre llaves { }. El conjunto {*a, b, c, d, e*} consta de cinco elementos, que son *a, b, c, d* y *e*. Un conjunto que no contiene elementos se denomina **conjunto vacío** (o **conjunto nulo**). Los símbolos { } o Ø se utilizan para representar al conjunto vacío.

Existen muchos conjuntos diferentes de números. Dos conjuntos importantes son los números naturales y los enteros no negativos, estos últimos ya presentados.

Números naturales: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Enteros no negativos: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Para comprender los conjuntos de los números, se puede recurrir a la recta de los números reales (vea la figura 1.7).

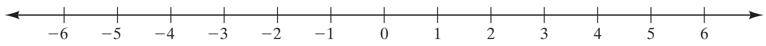


FIGURA 1.7

La recta de los números reales continúa en forma indefinida en ambas direcciones. Los números a la derecha del 0 son positivos, y los que están a la izquierda del 0 son negativos. El cero no es positivo ni negativo (vea la figura 1.8).

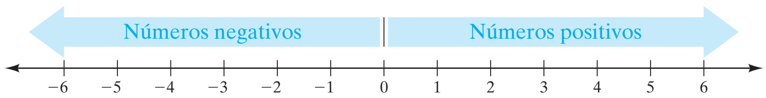


FIGURA 1.8

En la figura 1.9 se indican los números naturales en una recta numérica. Los naturales también se llaman **enteros positivos** o **números para conteo**.

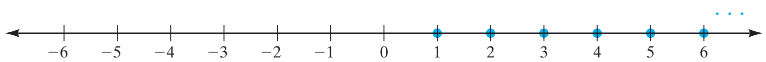


FIGURA 1.9

Otro conjunto importante de números es el de los enteros.

Enteros: $\{\underbrace{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1}_{\text{Enteros negativos}}, 0, \underbrace{1, 2, 3, 4, 5, \ldots}_{\text{Enteros positivos}}\}$

Los enteros constan de los enteros negativos, 0, y los enteros positivos. Los enteros están señalados en la recta numérica (figura 1.10).

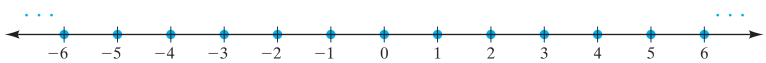


FIGURA 1.10

¿Puede pensar en algún número que no sea entero? Probablemente piense en *fracciones* o *números decimales*. Estos números pertenecen al conjunto de números racionales. El conjunto de **números racionales** consta de todos los números que se expresan como cociente de dos enteros, con el denominador distinto de 0.

Números racionales {cociente de dos enteros, denominador distinto de 0}

Todos los enteros son racionales puesto que es posible expresarlos con un denominador de 1. Por ejemplo, $3 = \frac{3}{1}$, $-12 = \frac{-12}{1}$, y $0 = \frac{0}{1}$. Todas las fracciones que contienen enteros en el numerador y en el denominador (diferente de 0), son números racionales. Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ es el cociente de dos enteros y por ello es un número racional.

Cuando una fracción que es razón de dos enteros se convierte a número decimal con la división del numerador entre el denominador, el cociente siempre será un *número decimal terminal*, como 0.3 y 3.25, o un *número decimal repetitivo* como 0.3333…, y 5.2727…. Los tres puntos al final de un número como 0.333… indican que el número se repite en forma indefinida. Todos los números decimales terminales y los repetitivos son números racionales que es posible expresar como cociente de dos enteros. Por ejemplo, $0.3 = \frac{3}{10}$, $3.25 = \frac{325}{100}$, $0.3333\ldots = \frac{1}{3}$ y $5.2727\ldots = \frac{522}{99}$. En la figura 1.11 se ilustran algunos números racionales sobre la recta numérica.

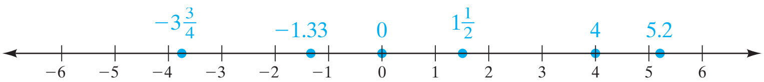


FIGURA 1.11

La mayoría de los números que utilizamos son racionales. Sin embargo, algunos no lo son. Números como la raíz cuadrada de 2, que se escribe $\sqrt{2}$, no son racionales. Cualquier número que pueda representarse en la recta numérica y que no sea racional, se denomina **número irracional**. Los números irracionales son números no terminales, no repetitivos. Así, por ejemplo, $\sqrt{2}$ no puede expresarse con exactitud como un número decimal. Los números irracionales sólo se *aproximan* con números decimales. La $\sqrt{2}$ es *aproximadamente* 1.41. Por ello, se escribe $\sqrt{2} \approx 1.41$. La figura 1.12 ilustra algunos números irracionales en la recta numérica. En capítulos posteriores se estudiará tanto a los números racionales como a los irracionales.

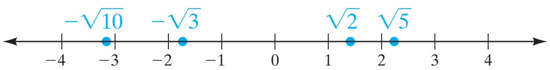


FIGURA 1.12

2 Conocer la estructura de los números reales

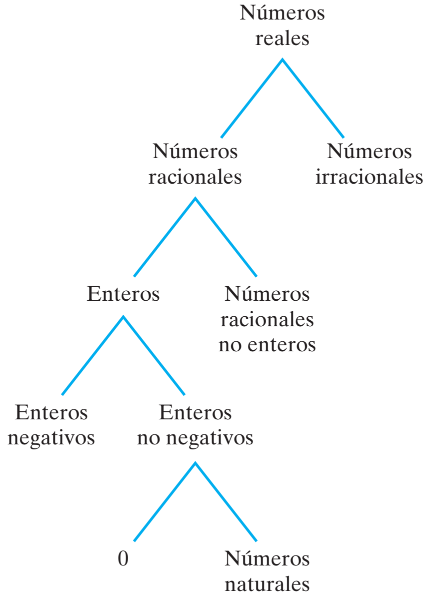
Observe que es posible ilustrar diversos tipos de números sobre la recta numérica. Cualquier número susceptible de representarse en la recta numérica es un **número real**.

Números reales: {todos los números que pueden representarse en una recta numérica}

El símbolo $\mathbb{R}$ se utiliza para representar el conjunto de números reales. Todos los números mencionados hasta ahora son números reales. Los números naturales, enteros no negativos, enteros, racionales e irracionales, son todos números reales. Existen ciertos tipos de números que no son reales, pero van más allá del alcance de este capítulo. La figura 1.13 ilustra las relaciones entre los distintos conjuntos de números dentro del conjunto de números reales.

En la figura 1.13b se observa que al combinar los números racionales con los irracionales, obtenemos los números reales. Al combinar los enteros con los racionales no enteros (como $\frac{1}{2}$ y 0.42), obtenemos los números racionales. Al reunir los enteros no negativos y los enteros negativos, obtenemos el conjunto de enteros.

Considere el número natural 5. Si seguimos las ramas de la figura 1.13a hacia arriba, vemos que el número 5 también es un entero no negativo, entero, racional y real. Ahora consideremos el número $\frac{1}{2}$. Pertenece a los números racionales no enteros. Si seguimos las ramas hacia arriba, podremos ver que $\frac{1}{2}$ también es un número racional y real.



(a)

Números reales

Números racionales (Enteros y números racionales no enteros)	Números irracionales (Ciertas* raíces cuadradas)
-12 $\quad 4$ $\quad 0$	$\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{5}$
$\frac{3}{8}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad -1.24$	π $\quad \sqrt{12}$
$-1\frac{3}{5}$ $\quad -2.463$	

*Otras raíces de orden superior, como $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{5}$ también son números irracionales.

(b)

FIGURA 1.13

EJEMPLO 1 Considere el siguiente conjunto de números:

$$\left\{-2, -0.8, 4\frac{1}{2}, -59, \sqrt{3}, 0, 9, -\frac{4}{7}, -2.9, \sqrt{7}, -\sqrt{5}\right\}$$

Enliste los elementos del conjunto que son

a) números naturales. **b)** enteros no negativos. **c)** enteros.
d) números racionales. **e)** números irracionales. **f)** números reales.

Solución Se enlistarán los elementos de izquierda a derecha según aparezcan en el conjunto. Sin embargo, pueden enlistarse en cualquier orden.

a) 9 **b)** 0, 9 **c)** $-2, -59, 0, 9$ **d)** $-2, -0.8, 4\frac{1}{2}, -59, 0, 9, -\frac{4}{7}, -2.9$

e) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, -\sqrt{5}$ **f)** $-2, -0.8, 4\frac{1}{2}, -59, \sqrt{3}, 0, 9, -\frac{4}{7}, -2.9, \sqrt{7}, -\sqrt{5}$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 51

Conjunto de ejercicios 1.4

Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es un conjunto?
2. ¿Cómo se llama al conjunto que no tiene elementos?
3. Describa un conjunto que sea un conjunto vacío.
4. Dé dos símbolos que se utilicen para representar al conjunto vacío.
5. ¿En qué difieren el conjunto de los números naturales y el de los enteros no negativos?
6. ¿Cuáles son otros dos nombres del conjunto de números naturales?
7. **a)** ¿Qué es un número racional?
   b) Explique por qué todo entero es un número racional.
8. Explique por qué el número natural 7 también es un
   a) entero positivo.
   b) número racional.
   c) número real.
9. El 0 es miembro del conjunto de los
   a) ¿enteros?

Considere los pares de conjuntos siguientes.

Miembro del grupo 1 : $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$
Miembro del grupo 2: $A = \{a, b, c, d, g, i, j\}$ $B = \{b, c, d, h, m, p\}$
Miembro del grupo 3: $A = \{\text{rojo, azul, verde, amarillo}\}$ $B = \{\text{rosa, naranja, morado}\}$

a) Encuentre la unión e intersección de los conjuntos que se indican para los miembros del grupo 1.
b) Encuentre la unión e intersección de los conjuntos que se dan para los miembros del grupo 2.
c) Encuentre la unión e intersección de los conjuntos que se marcan para los miembros del grupo 3.
d) Ahora, como grupo, revisen el trabajo de todos. Corrijan cualquier error.
e) Como grupo, con los conjuntos de los miembros del grupo 1, construyan diagramas de Venn como los de los ejercicios 67 y 68.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **73.** Convierta $5\frac{2}{5}$ a fracción.

74. Escriba $\frac{16}{3}$ como número mixto.

75. Sume $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$.

76. Multiplique $\left(\frac{5}{9}\right)\left(4\frac{2}{3}\right)$.

1.5 DESIGUALDADES

1 Determinar cuál es el mayor de dos números.
2 Encontrar el valor absoluto de un número.

1 Determinar cuál es el mayor de dos números

Para explicar las desigualdades se utilizará la recta numérica, que muestra números que crecen de izquierda a derecha (vea la figura 1.14). Al comparar dos números, **el número a la derecha de la recta numérica es el mayor, y el que está a la izquierda es el menor.** El símbolo $>$ se emplea para representar las palabras "es mayor que". El símbolo $<$ se utiliza para representar las palabras "es menor que".

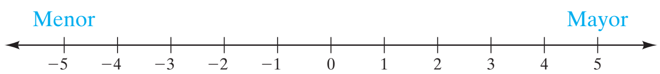


FIGURA 1.14

La afirmación de que el número 3 es mayor que el 2 se escribe $3 > 2$. Observe que en la recta numérica, 3 está a la derecha del 2. La proposición de que 0 es mayor que -1 se escribe $0 > -1$. Observe que el 0 está a la derecha del -1 en la recta numérica.

En vez de afirmar que 3 es mayor que 2, podríamos decir que 2 es menor que 3, lo que escribimos como $2 < 3$. Observe que en la recta numérica el 2 está a la izquierda del 3. La afirmación de que el -1 es menor que el 0 se escribe como $-1 < 0$. Observe que el -1 está a la izquierda del 0 en la recta numérica.

EJEMPLO 1 Inserte cualquiera de los símbolos $>$ o $<$ en el área sombreada entre los pares de números, para hacer la proposición verdadera.

a) $-4 \;\square\; -2$ **b)** $-\frac{3}{2} \;\square\; 2.5$ **c)** $\frac{1}{2} \;\square\; \frac{1}{4}$ **d)** $-2 \;\square\; 4$

Solución Los puntos dados se muestran en la recta numérica (vea la figura 1.15).

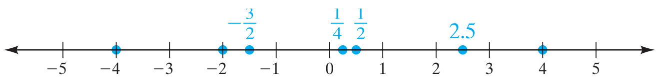


FIGURA 1.15

a) $-4 < -2$; observe que el -4 queda a la izquierda del -2.

b) $-\dfrac{3}{2} < 2.5$; observe que $-\dfrac{3}{2}$ está a la izquierda del 2.5.

c) $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$; observe que $\dfrac{1}{2}$ está a la derecha de $\dfrac{1}{4}$.

d) $-2 < 4$; observe que -2 está a la izquierda de 4.

EJEMPLO 2 Inserte cualquiera de los símbolos $>$ o $<$ en el área sombreada entre cada par de números, de modo que la proposición sea verdadera.

a) -1 ▢ -2 **b)** -1 ▢ 0 **c)** -2 ▢ 2 **d)** -4.09 ▢ -4.9

Solución En la recta numérica se aprecian los números dados (vea la figura 1.16).

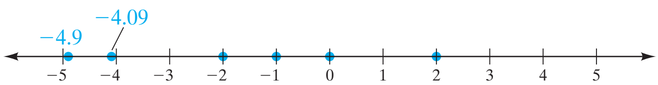


FIGURA 1.16

a) $-1 > -2$; observe que -1 está a la derecha de -2.

b) $-1 < 0$; observe que el -1 se localiza a la izquierda del 0.

c) $-2 < 2$; observe que el -2 se encuentra a la izquierda del 2.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 29

d) $-4.09 > -4.9$; observe que -4.09 queda a la derecha de -4.9.

2 Encontrar el valor absoluto de un número

El concepto de valor absoluto se explicará con ayuda de la recta numérica que se aprecia en la figura 1.17. El **valor absoluto** de un número se considera como la distancia que hay entre el número en cuestión y el 0, sobre la recta numérica. Así, el valor absoluto de 3, que se escribe como $|3|$, es 3, ya que se localiza a 3 unidades de distancia sobre la recta numérica. De modo similar, el valor absoluto de -3, que se denota con $|-3|$, también es 3, puesto que está a 3 unidades del 0.

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |-3| = 3$$

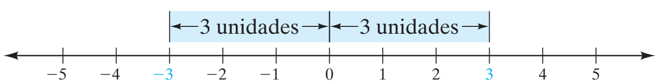


FIGURA 1.17

Como el valor absoluto de un número mide la distancia (sin importar la dirección) que hay del número al 0, sobre la recta numérica, *el valor absoluto de cualquier número será positivo o cero.*

Número	Valor absoluto del número
6	$\lvert 6\rvert = 6$
-6	$\lvert -6\rvert = 6$
0	$\lvert 0\rvert = 0$
$-\frac{1}{2}$	$\left\lvert -\frac{1}{2}\right\rvert = \frac{1}{2}$

El negativo del valor absoluto de un número distinto de cero siempre será un número negativo. Por ejemplo,

$$-\lvert 2\rvert = -(2) = -2 \quad \text{y} \quad -\lvert -3\rvert = -(3) = -3$$

EJEMPLO 3 Inserte cualquiera de los símbolos $>$, $<$ o $=$, en cada área sombreada, de manera que el enunciado sea verdadero.

a) $\lvert 3\rvert \ \square\ 3$ **b)** $\lvert -2\rvert \ \square\ \lvert 2\rvert$ **c)** $-2 \ \square\ \lvert -4\rvert$ **d)** $\lvert -5\rvert \ \square\ 0$ **e)** $\left\lvert -\frac{4}{9}\right\rvert \ \square\ \lvert -18\rvert$

Solución **a)** $\lvert 3\rvert = 3$. **b)** $\lvert -2\rvert = \lvert 2\rvert$, ya que tanto $\lvert -2\rvert$ como $\lvert 2\rvert$ es igual a 2.

c) $-2 < \lvert -4\rvert$, puesto que $\lvert -4\rvert = 4$. **d)** $\lvert -5\rvert > 0$, puesto que $\lvert -5\rvert = 5$.

e) $\left\lvert -\frac{4}{9}\right\rvert < \lvert -18\rvert$, ya que $\left\lvert -\frac{4}{9}\right\rvert = \frac{4}{9}$ y $\lvert -18\rvert = 18$.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 57

En las secciones 1.6 y 1.7 se usará el valor absoluto para sumar y restar números reales. El concepto de valor absoluto es muy importante en cursos de matemáticas de nivel superior. Si usted sigue un curso de álgebra intermedia, aprenderá una definición más formal del valor absoluto.

Conjunto de ejercicios 1.5

Ejercicios conceptuales

1. **a)** Dibuje una recta numérica.
   b) Marque los números -2 y -4 en la recta numérica que dibujó.
   c) ¿-2 es menor que -4, o -2 es mayor que -4? Explique.
   En los incisos **d)** y **e)**, escriba un enunciado correcto con el empleo de -2 y -4, así como el símbolo que se da.
   d) $<$
   e) $>$
2. ¿Qué es el valor absoluto de un número?
3. **a)** Explique por qué el valor absoluto de 4, $\lvert 4\rvert$, es 4.
   b) Diga por qué el valor absoluto de -4, $\lvert -4\rvert$, es 4.
   c) Diga por qué el valor absoluto de 0, $\lvert 0\rvert$, es 0.
4. ¿Existen cualesquiera números reales cuyo valor absoluto no sea un número positivo? Explique su respuesta.
5. Suponga que a y b representan a dos números reales cualesquiera. Si $a > b$ es verdad, ¿también será verdad que $b < a$? Explique y dé algunos ejemplos en los que utilice números específicos para a y b.
6. ¿Será siempre verdad que $\lvert a\rvert - \lvert a\rvert = 0$, para cualquier número real a? Explique.
7. Suponga que a y b representan dos números reales cualesquiera. Suponga que es verdad que $a > b$. ¿Será verdad también que $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$? Explique y dé un ejemplo que apoye su respuesta.
8. Suponga que a y b son dos números reales cualesquiera. Suponga que es verdad que $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$. ¿También será verdad que $a < b$? Explique y proporcione un ejemplo para respaldar su respuesta.
9. Suponga que a y b son dos números reales cualesquiera. Suponga que se cumple que $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$. ¿También se cumplirá que $a > b$? Explique y dé un ejemplo que ilustre su respuesta.
10. Suponga que a y b son dos números reales cualesquiera. Suponga que $a < b$ es cierto. ¿También será cierto que $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$? Explique su respuesta y dé un ejemplo que la apoye.

Práctica de habilidades

Evalúe lo siguiente.

11. $\lvert 7\rvert$	**12.** $\lvert -6\rvert$	**13.** $\lvert -15\rvert$	**14.** $\lvert -10\rvert$	**15.** $\lvert 0\rvert$
16. $\lvert 54\rvert$	**17.** $-\lvert -5\rvert$	**18.** $-\lvert 92\rvert$	**19.** $-\lvert 21\rvert$	**20.** $-\lvert -34\rvert$

Actividad en grupo

Como grupo, analicen y respondan el ejercicio 97.

97. a) Miembro 1 del grupo: dibuje una recta numérica y marque puntos sobre ella que representen los números siguientes:

$$|-2|, \qquad -|3|, \qquad -\left|\frac{1}{3}\right|$$

b) Miembro 2 del grupo: haga lo mismo que en el inciso **a)**, pero sobre la recta numérica marque los números siguientes:

$$|-4|, \qquad -|2|, \qquad \left|-\frac{3}{5}\right|$$

c) Miembro 3 del grupo: haga lo mismo que en los incisos **a)** y **b)**, pero señale los puntos para los números siguientes.

$$|0|, \qquad \left|\frac{16}{5}\right|, \qquad -|-3|$$

d) Como grupo, construyan una recta numérica que contenga todos los puntos que se enlistaron en los incisos **a)**, **b)** y **c)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **98.** Haga la resta $1\frac{2}{3} - \frac{3}{8}$.

[1.4] **99.** Enliste el conjunto de enteros no negativos.

100. Enliste el conjunto de números para contar.

101. Considere el conjunto siguiente de números.

$$\left\{5, -2, 0, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, -\frac{5}{9}, 2.3\right\}$$

Enliste los números que sean

a) naturales.

b) enteros no negativos.

c) enteros.

d) racionales.

e) irracionales.

f) reales.

1.6 SUMA DE NÚMEROS REALES

1. Sumar números reales mediante la recta numérica.
2. Sumar fracciones.
3. Identificar los opuestos.
4. Sumar utilizando el valor absoluto.
5. Sumar con calculadora.

Existen muchos usos prácticos para los números negativos. Un submarino que desciende bajo el nivel del mar, una cuenta bancaria sobregirada, un negocio que gasta más de lo que gana, y una temperatura bajo cero son algunos ejemplos.

Las cuatro **operaciones** básicas de la aritmética son suma, resta, multiplicación y división. En las siguientes secciones explicaremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números. Consideraremos tanto números positivos como negativos. En esta sección estudiaremos la suma.

1 Sumar números reales mediante la recta numérica

Para sumar números haremos uso de una recta numérica. Representaremos el primer número que se va a sumar (el primer *sumando*) con una flecha que comience en 0. Se dibuja la flecha hacia la derecha si el número es positivo; y hacia la izquierda si es negativo. Desde la punta de la primera flecha se dibuja una segunda para representar al segundo sumando. Se dibuja esta segunda flecha hacia la derecha o izquierda, según se explicó. La suma de los dos números se encuentra en la punta de la segunda flecha. Observe que con excepción del 0, *cualquier número sin un signo frente a sí es positivo.* Por ejemplo, 3 significa +3 y 5 significa +5.

EJEMPLO 1 Evalúe $3 + (-4)$, con una recta numérica.

Solución *Siempre se comienza en el 0.* Como el primer sumando, 3, es positivo, la primera flecha comienza en el 0 y se prolonga 3 unidades a la derecha (vea la figura 1.18).

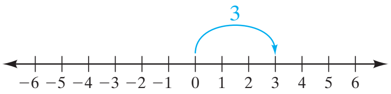


FIGURA 1.18

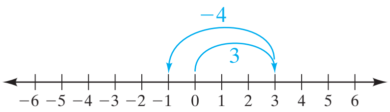


FIGURA 1.19

La segunda flecha comienza en 3 y se traza 4 unidades a la izquierda, ya que el segundo sumando es negativo (consulte la figura 1.19). El extremo de la segunda flecha está en -1. Entonces,

$$3 + (-4) = -1$$

EJEMPLO 2 Evalúe $-4 + 2$, por medio de una recta numérica.

Solución Se comienza en 0. Como el primer sumando es negativo, -4, la primera flecha se traza 4 unidades hacia la izquierda. Desde ahí, como el 2 es positivo, la segunda flecha se dibuja 2 unidades hacia la derecha. La segunda flecha termina en -2 (vea la figura 1.20).

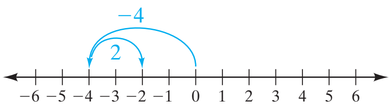


FIGURA 1.20

$$-4 + 2 = -2$$

EJEMPLO 3 Evalúe $-3 + (-2)$, por medio de una recta numérica.

Solución Se comienza en 0. Como ambos números por sumar son negativos, se dibujan las dos flechas hacia la izquierda. (Vea la figura 1.21).

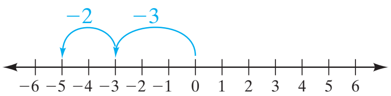


FIGURA 1.21

$$-3 + (-2) = -5$$

En el ejemplo 3, podemos pensar en la expresión $-3 + (-2)$ como una combinación de *perder* 3 y luego *perder* 2 para en total *perder* 5, o sea -5.

EJEMPLO 4 Evalúe $5 + (-5)$, por medio de una recta numérica.

Solución La primera flecha comienza en el 0 y se traza 5 unidades hacia la derecha. La segunda flecha comienza en 5 y se traza 5 unidades hacia la izquierda. El extremo de la segunda flecha está en el 0. Entonces, $5 + (-5) = 0$ (vea la figura 1.22).

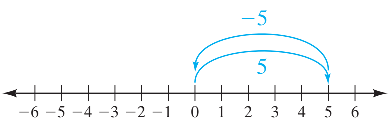


FIGURA 1.22

$$5 + (-5) = 0$$

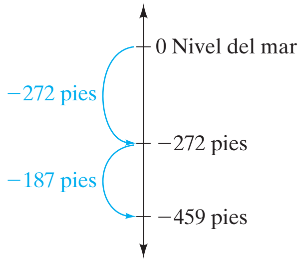


FIGURA 1.23

EJEMPLO 5

Profundidad de un submarino Un submarino desciende 272 pies. Más tarde baja otros 187 pies. Encuentre la profundidad a la que está el submarino (suponga que se indican las profundidades bajo el nivel del mar con números negativos).

Solución Una recta numérica vertical ayudará a visualizar este problema.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 117

$$-272 + (-187) = -459 \text{ pies}$$

2 Sumar fracciones

En la sección 1.3 estudiamos las fracciones y explicamos la manera de sumar fracciones positivas. Para sumar fracciones, en las que una o más de ellas son negativas, utilizamos el mismo procedimiento general que se estudió en dicha sección. Cuando los denominadores no sean los mismos, debe obtenerse un común denominador. Una vez que lo obtenemos, conseguimos la respuesta sumando los numeradores que ya tienen el común denominador. Por ejemplo, suponga que después de obtener el común denominador tiene $-\frac{19}{29} + \frac{13}{29}$. Para obtener el numerador de la respuesta sumamos $-19 + 13$ arriba de la recta numérica para obtener -6. El denominador de la respuesta es el común denominador, 29. Así, la respuesta es $-\frac{6}{29}$. Estos cálculos se indican de la siguiente manera.

$$-\frac{19}{29} + \frac{13}{29} = \frac{-19 + 13}{29} = \frac{-6}{29} = -\frac{6}{29}$$

Se ilustrará con otro ejemplo. Suponga que después de obtener un común denominador tenemos $-\frac{7}{40} + \left(-\frac{5}{40}\right)$. Para obtener el numerador de la respuesta sumamos $-7 + (-5)$ sobre la recta numérica, para obtener -12. El denominador de la respuesta es 40. Por lo tanto, la respuesta antes de simplificar es $-\frac{12}{40}$. La respuesta final ya simplificada sería $-\frac{3}{10}$. A continuación se muestran estos cálculos:

$$-\frac{7}{40} + \left(-\frac{5}{40}\right) = \frac{-7 + (-5)}{40} = \frac{-12}{40} = -\frac{3}{10}$$

EJEMPLO 6

Sumar $-\frac{5}{12} + \frac{4}{5}$.

Solución En primer lugar, determinamos el mínimo común denominador, que resulta ser 60. Al cambiar cada fracción a otra con dicho denominador, obtenemos

$$-\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{12}$$

$$\text{o bien} \quad -\frac{25}{60} + \frac{48}{60}$$

Ahora, las fracciones por sumar tienen un común denominador. Para sumarlas, se conserva éste y se suman los numeradores, para obtener,

$$-\frac{5}{12} + \frac{4}{5} = -\frac{25}{60} + \frac{48}{60} = \frac{-25 + 48}{60}$$

Ahora, se suma $-25 + 48$ en la recta numérica y obtenemos el numerador de la fracción, 23; vea la figura 1.24.

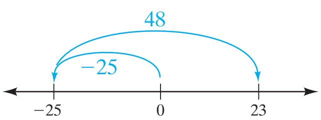


FIGURA 1.24

Entonces, $\frac{-25 + 48}{60} = \frac{23}{60}$ y $-\frac{5}{12} + \frac{4}{5} = \frac{23}{60}$.

EJEMPLO 7 Sumar $-\frac{7}{8} + \left(-\frac{3}{40}\right)$.

Solución El mínimo común denominador (o mcd) es 40. Al reescribir cada fracción con el mcd se llega a lo siguiente.

$$-\frac{7}{8} + \left(-\frac{3}{40}\right) = -\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{5} + \left(-\frac{3}{40}\right)$$
$$= -\frac{35}{40} + \left(-\frac{3}{40}\right) = \frac{-35 + (-3)}{40}$$

Ahora, sumamos $-35 + (-3)$ para obtener el numerador de la fracción, -38; vea la figura 1.25.

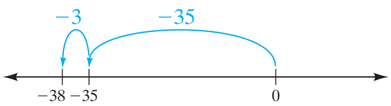


FIGURA 1.25

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 83

Entonces, $-\frac{7}{8} + \left(-\frac{3}{40}\right) = \frac{-35 + (-3)}{40} = -\frac{38}{40} = -\frac{19}{20}$.

SUGERENCIA

En el ejemplo 6, de la figura 1.24, se ilustró que al comenzar en 0 y moverse 25 unidades a la izquierda, y después 48 unidades a la derecha, se termina en el número positivo 23. Así, $-25 + 48 = 23$.

Cuando los números son grandes, no es de esperarse que en realidad marque y cuente las unidades. Por ejemplo, no es necesario contar 48 unidades a la derecha de -25 para obtener la respuesta de 23.

En el objetivo 3 se mostrará cómo obtener $-25 + 48$ sin tener que dibujar rectas numéricas. Aquí se presentó la suma sobre la recta numérica para ayudarlo a determinarla sin hacer cálculos, sea que la suma de los dos números fuera un número positivo, negativo o cero.

3 Identificar los opuestos

Ahora, consideraremos a los **opuestos**, o **inversos aditivos**.

DEFINICIÓN

Se dice que dos números cualesquiera cuya suma sea cero son **opuestos** (o **inversos aditivos**) uno del otro. En general, si se representa con a cualquier número real, entonces su opuesto es $-a$ y $a + (-a) = 0$.

En el ejemplo 4, la suma de 5 más -5 dio 0. Así, -5 es el opuesto de 5, y 5 es el opuesto de -5.

EJEMPLO 8 Encuentre los opuestos de cada número. **a)** 3 **b)** -4 **c)** $-\frac{7}{8}$

Solución

a) El opuesto de 3 es -3, ya que $3 + (-3) = 0$.

b) El opuesto de -4 es 4, puesto que $-4 + 4 = 0$.

c) El opuesto de $-\frac{7}{8}$ es $\frac{7}{8}$, toda vez que $-\frac{7}{8} + \frac{7}{8} = 0$.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 15

4 Sumar utilizando el valor absoluto

Ahora que tenemos cierta práctica sumando números con signo sobre una recta numérica, daremos una regla (en dos partes) para utilizar el valor absoluto en la suma de números con signo. Recuerde que el valor absoluto de un número distinto de cero siempre es positivo. A continuación se enuncia la primera parte de la regla:

> **Para sumar números reales con el mismo signo** (ambos positivos o ambos negativos), sume sus valores absolutos. El resultado tiene el mismo signo que los números sumados.

EJEMPLO 9 Sumar $4 + 8$.

Solución Como ambos números tienen el mismo signo (ambos positivos), se suman sus valores absolutos: $|4| + |8| = 4 + 8 = 12$. Como los dos números que se suman son positivos, la suma es positiva. Así, $4 + 8 = 12$. ✷

EJEMPLO 10 Sumar $-6 + (-9)$.

Solución Ya que ambos números tienen el mismo signo (ambos negativos), se suman sus valores absolutos: $|-6| + |-9| = 15$. Como los números que se suman son negativos, la suma será negativa. Entonces, $-6 + (-9) = -15$. ✷

La suma de dos números positivos siempre será positiva, y la de dos números negativos siempre será negativa.

> **Para sumar dos números con signos diferentes** (uno positivo y el otro negativo), se resta el valor absoluto más pequeño del valor absoluto más grande. La respuesta tiene el signo del número con valor absoluto más grande.

EJEMPLO 11 Sumar $10 + (-6)$.

Solución Los dos números por sumar tienen signos diferentes, por lo que se resta el valor absoluto más pequeño del más grande: $|10| - |-6| = 10 - 6 = 4$. Como $|10|$ es mayor que $|-6|$ y el signo de 10 es positivo, la suma es positiva. Entonces, $10 + (-6) = 4$. ✷

EJEMPLO 12 Sumar $12 + (-18)$.

Solución Los dos números por sumar tienen signos diferentes, por lo que se resta el valor más pequeño del más grande: $|-18| - |12| = 18 - 12 = 6$. Como $|-18|$ es mayor que $|12|$, y el signo de -18 es negativo, la suma es negativa. Así, $12 + (-18) = -6$. ✷

EJEMPLO 13 Sumar $-21 + 20$.

Solución Los dos números por sumar tienen signos diferentes, por lo que se resta el valor absoluto más pequeño del más grande: $|-21| - |20| = 21 - 20 = 1$. Como $|-21|$ es mayor que $|20|$, la suma es negativa. Por tanto, $-21 + 20 = -1$. ✷

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 45

Ahora veremos algunos ejemplos que contienen fracciones y números decimales.

EJEMPLO 14 Sumar $-\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$.

Solución Cada fracción se escribe con el mínimo común denominador, 35.

$$-\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = -\frac{3}{5} \cdot \boxed{\frac{7}{7}} + \frac{4}{7} \cdot \boxed{\frac{5}{5}}$$

$$= \frac{-21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{-21 + 20}{35}$$

Como $|-21|$ es mayor que $|20|$, la respuesta final será negativa. En el ejemplo 13 se halló que $-21 + 20 = -1$. Por lo tanto, escribimos

$$\frac{-21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{-21 + 20}{35} = \frac{-1}{35} = -\frac{1}{35}$$

Entonces, $-\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = -\frac{1}{35}$.

EJEMPLO 15 Sumar $-24.23 + (-17.96)$.

Solución Como ambos números tienen el mismo signo, negativo, sumamos sus valores absolutos: $|-24.23| + |-17.96| = 24.23 + 17.96$.

$$\begin{array}{r} 24.23 \\ +\,17.96 \\ \hline 42.19 \end{array}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 57

Como se suman dos números negativos, el resultado es negativo. Por lo tanto, $-24.23 + (-17.96) = -42.19$.

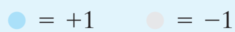
La suma de dos números con signos diferentes puede ser positiva o negativa. El signo de la suma será igual al signo del número con mayor valor absoluto.

SUGERENCIA

Los arquitectos hacen un modelo a escala de un edificio antes de iniciar su construcción. Este “modelo” los ayuda a visualizar el proyecto y con frecuencia a evitar problemas.

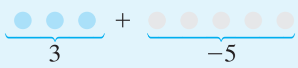
Los matemáticos también construyen modelos. Un *modelo* matemático es una representación física de un concepto matemático. Puede ser tan simple como usar rayas o bolas que representen números específicos. Por ejemplo, a continuación se utiliza un modelo para explicar la suma de números reales. Esto tal vez le ayude a entender mejor los conceptos.

Se decide que una bolita roja representa $+1$ y una gris -1.



Si sumamos $+1$ y -1, o una bolita roja con una gris, obtenemos 0.

Ahora consideremos el problema de sumar $3 + (-5)$. Esto se representa así,



Si eliminamos 3 bolitas rojas y 3 grises, o tres ceros, quedan 2 grises, lo que representa el resultado de -2. Así, $3 + (-5) = -2$.

(continúa en la página siguiente)

Ahora, consideremos el problema de sumar $-4 + (-2)$. Esto se representa con

$$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{-4} + \underbrace{\bullet\ \bullet}_{-2}$$

Como se termina con 6 bolitas grises y cada una representa -1, el resultado es -6. Por tanto, $-4 + (-2) = -6$.

EJEMPLO 16 **Ganancia o pérdida netas** La compañía B.J. Donaldson Printing tuvo una pérdida de \$4,000 durante los 6 primeros meses del año, y una utilidad de \$29,500 durante los siguiente 6 meses. Encuentre la utilidad o pérdida neta del año.

Solución Entender y traducir Este problema se representa como $-4{,}000 + 29{,}500$. Como los dos números por sumar tienen signos diferentes, restamos el valor absoluto más pequeño del más grande.

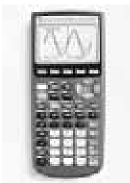
Calcular $$|29{,}500| - |-4{,}000| = 29{,}500 - 4{,}000 = 25{,}500$$

Así, $-4{,}000 + 29{,}500 = 25{,}500$.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 12

Revisar y responder La respuesta es razonable. Por tanto, la utilidad neta del año fue de \$25,500.

5 Sumar con calculadora



A lo largo del libro, en el recuadro de Uso de la calculadora se dará información acerca de ellas. Algunos serán para calculadoras científicas; otros, para calculadoras graficadoras, y algunos más para ambas. En el margen se observan dos ilustraciones; una calculadora científica (la de la izquierda) y una calculadora graficadora (la de la derecha). Las calculadoras graficadoras hacen lo mismo y un poco más que una calculadora científica. Pregunte al profesor si recomienda una calculadora en particular para este curso. Si planea seguir cursos adicionales de matemáticas, tal vez deba considerar el tipo de calculadora que podría emplear en los otros cursos.

Es importante que entienda los procedimientos para sumar, restar, multiplicar y dividir números reales *sin* emplear calculadora. *No debe depender de una calculadora para resolver problemas*. Sin embargo, si se le permite utilizarla, empléela para ahorrar tiempo con los cálculos difíciles. Si comprendió los conceptos básicos, y la respuesta no parece razonable, usted será capaz de darse cuenta si cometió un error al introducir los datos a la calculadora.

A continuación presentaremos el primero de muchos recuadros del Uso de la calculadora y del Uso de la calculadora graficadora. Observe que en ellos *no se presenta material nuevo*. Se presentan para ayudarle a emplear la calculadora que utilice en este curso. No se preocupe si no sabe lo que hacen todas las teclas. Su profesor le indicará cuáles necesita conocer para poder utilizarla.

En los recuadros de Uso de la calculadora graficadora, cuando se muestren secuencias de teclas o pantallas gráficas (llamadas ventanas), serán para los modelos Texas Instruments TI-83 o Texas Instruments TI-83 Plus. Para el material que se cubre en este libro de texto, las pulsaciones de teclas y las gráficas que se obtienen serán las mismas para ambas calculadoras. Debe leerse el manual de la calculadora graficadora para obtener instrucciones más detalladas.

Uso de la calculadora

Introducción de números negativos

La mayoría de calculadoras tienen una tecla $\boxed{+/-}$, que se emplea para introducir números negativos. Para introducir -5, oprima 5 $\boxed{+/-}$ y aparecerá un -5. A continuación se muestra cómo evaluar ciertos problemas de suma en una calculadora científica.

Suma de números reales

Evaluar	Teclas*	Respuesta en pantalla
$-9 + 24$	$9\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ 24\ \boxed{=}$	15
$15 + (-22)$	$15\ \boxed{+}\ 22\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$	-7
$-30 + (-16)$	$30\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ 16\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$	-46

* En algunas calculadoras científicas, el signo negativo se introduce antes del número, igual que en las calculadoras graficadoras.

Uso de la calculadora graficadora

Introducción de números negativos

Las calculadoras graficadoras tienen dos teclas similares, como se muestra a continuación

$\boxed{(-)}$ ↑ *Se utiliza para hacer que un número sea negativo*

$\boxed{-}$ ↑ *Se emplea para restar*

Suma de números reales

Evaluar	Teclas	Respuesta en pantalla
$-9 + 24$	$\boxed{(-)}\ 9 + 24\ \boxed{\text{ENTER}}$	15
$15 + (-22)$	$15 + \boxed{(-)}\ 22\ \boxed{\text{ENTER}}$	-7
$-30 + (-16)$	$\boxed{(-)}\ 30 + \boxed{(-)}\ 16\ \boxed{\text{ENTER}}$	-46

Para hacer que un número sea negativo en una calculadora graficadora, primero se oprime la tecla $\boxed{(-)}$, y después se introduce el número.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 97

Conjunto de ejercicios 1.6

Ejercicios conceptuales

1. ¿Cuáles son las cuatro operaciones básicas de la aritmética?

2. a) ¿Qué son los opuestos o inversos aditivos?

b) Dé un ejemplo de dos números que sean opuestos.

3. a) Los números $-\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$, ¿son opuestos? Explique.

b) Si los números del inciso **a)** no son opuestos, ¿cuál es el opuesto de $-\frac{2}{3}$?

4. Si se suman dos números negativos, ¿la suma será un número positivo o uno negativo? Explique.

5. Si se suma un número positivo y otro negativo, ¿la suma será positiva, negativa u otra? Explique.

6. a) Si se suma $-24{,}692$ más $30{,}519$, ¿la suma será positiva o negativa? Sin hacer ningún cálculo, explique cómo hizo para determinar la respuesta.

b) Repita el inciso **a)** para los números $24{,}692$ y $-30{,}519$.

c) Vuelva a hacer el inciso **a)** para los números $-24{,}692$ y $-30{,}519$.

b) Estime la ganancia o pérdida netas del Servicio Postal durante cada uno de los años de 1999, 2000 y 2001. Después, calcule la ganancia o pérdida neta de 1999 a 2001 con la suma de las tres ganancias netas.

124. En la siguiente gráfica se muestran los cambios porcentuales de 1996 a 2000, para delitos seleccionados, en los Estados Unidos.

a) Determine el cambio porcentual en robo de auto, de 1998 a 2000, con la suma de los porcentajes individuales durante los años de 1998, 1999 y 2000.

b) Determine el cambio porcentual en delitos violentos en los E.U., de 1998 a 2000.

Cambio porcentual respecto del año anterior para delitos en los E.U.

Año	Delito violento	Robo de auto
1996	−6.5%	−5.2%
1997	−3.2%	−2.9%
1998	−6.4%	−8.4%
1999	−6.7%	−7.7%
2000	0.1%	2.7%

Fuente: FBI

Problemas de reto

Evalúe cada ejercicio con la suma de los números de izquierda a derecha. En breve se estudiarán problemas como éstos.

125. $(-4) + (-6) + (-12)$

126. $5 + (-7) + (-8)$

127. $29 + (-46) + 37$

128. $4 + (-5) + 6 + (-8)$

129. $(-12) + (-10) + 25 + (-3)$

130. $(-4) + (-2) + (-15) + (-27)$

131. $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}$

132. $-\frac{3}{8} + \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

Realice las siguientes sumas. Explique cómo determinó su respuesta. (Sugerencia: Empareje los números pequeños con los grandes, a partir de cada extremo.)

133. $1 + 2 + 3 + \cdots + 10$

134. $1 + 2 + 3 + \cdots + 20$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **135.** Multiplique $\left(\frac{3}{5}\right)\left(1\frac{2}{3}\right)$.

136. Reste $3 - \frac{5}{16}$.

[1.4] **137.** Enliste el conjunto de números para contar.

[1.5] Inserte cualquiera de los símbolos $<$, $>$ o $=$, en cada una de las áreas sombreadas, para que la proposición sea verdadera.

138. $|-3| \ \square\ 2$

139. $8 \ \square\ |-7|$

1.7 RESTA DE NÚMEROS REALES

1. Restar números.
2. Restar números en forma mental.
3. Evaluar expresiones que contienen más de dos números.

1 Restar números

Cualquier problema de resta puede ser escrito de nuevo como un problema de suma mediante el inverso aditivo.

Resta de números reales

En general, si a y b representan dos números reales cualesquiera, entonces

$$a - b = a + (-b)$$

Esta regla afirma que para restar b de a, hay que sumar el opuesto o inverso aditivo de b a a.

EJEMPLO 1 Evalúe $9 - (+4)$.

Solución Estamos restando un 4 positivo de 9. Para hacer esto, sumamos el opuesto de $+4$, que es -4, a 9.

$$9 - (+4) = 9 + (-4) = 5$$

Resta *4 positivo* *Suma* *4 negativo*

Evaluamos $9 + (-4)$ con los procedimientos para *sumar* números reales, que presentamos en la sección 1.6.

Con frecuencia, en un problema de sustracción, cuando el número por restar es positivo, el signo $+$ que lo precede no se escribe. Por ejemplo, en la resta $9 - 4$,

$$9 - \boxed{4} \text{ significa } 9 - \boxed{(+4)}$$

Así, para evaluar $9 - 4$, se suma el opuesto de 4, que es -4, a 9.

$$9 - 4 = 9 + (-4) = 5$$

Resta *4 positivo* *Suma* *4 negativo*

Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Evalúe $5 - 3$.

Solución Debe restarse un 3 positivo de 5. Para cambiar este problema a otro de suma, se suma el opuesto de 3, que es -3, a 5.

$$\overbrace{5 - 3}^{\text{Problema de resta}} = \overbrace{5 + (-3)}^{\text{Problema de suma}} = 2$$

Resta *3 positivo* *Suma* *3 negativo*

EJEMPLO 3 Evalúe

a) $4 - 9$ **b)** $-4 - 2$

Solución **a)** Sumar el opuesto de 9, que es -9, a 4.

$$4 - 9 = 4 + (-9) = -5$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 15

b) Sumar el opuesto de 2, que es -2, a -4.

$$-4 - 2 = -4 + (-2) = -6$$

EJEMPLO 4 Evalúe $4 - (-2)$.

Solución Se pide restar de 4 un 2 negativo. Para hacer esto, se suma el opuesto de -2, que es 2, a 4.

$$4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

Restar *2 negativo* *Sumar* *2 positivo*

SUGERENCIA

Al examinar el ejemplo 4 se observa que

$$4 - (-2) = 4 + 2$$

Dos signos negativos juntos *Más*

Siempre que restamos un número negativo, se remplazan los dos signos negativos por uno positivo.

EJEMPLO 5

Evalúe

a) $7 - (-5)$ **b)** $-15 - (-12)$

Solución **a)** Como se está restando de 7 un número negativo, sumando el opuesto de -5, que es 5, quedan dos signos negativos juntos que se sustituyen por uno positivo.

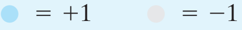
$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 19

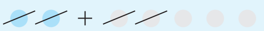
b) $-15 - (-12) = -15 + 12 = -3$

SUGERENCIA

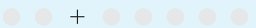
Ahora se indicará cómo se ilustra la resta por medio de bolitas. Recuerde que en la sección anterior una bolita roja representaba $+1$ y una gris -1.



Consideremos el problema de restar $2 - 5$. Si cambiamos éste a un problema de suma, queda $2 + (-5)$. Entonces, podemos sumar como se hizo en la sección anterior. La siguiente figura muestra que $2 + (-5) = -3$.



Ahora consideremos $-2\ -5$. Esto significa $-2 + (-5)$, que se puede representar como sigue:



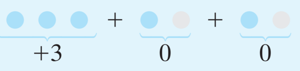
Así, $-2 - 5 = -7$.

Ahora considere el problema de hacer $-3 - (-5)$. Esto se reescribe como $-3 + 5$, que se representa de la siguiente manera:

Así, $-3 - (-5) = 2$.

Algunos estudiantes tienen problemas para comprender por qué cuando se resta un número negativo se obtiene uno positivo. Se estudiará el problema $3 - (-2)$. En esta ocasión lo analizaremos desde un punto de vista un poco diferente. Se comienza con 3:

De esto se desea restar un 2 negativo. Al $+3$ que se muestra arriba se sumarán dos ceros con combinaciones de sumas de $+ 1\ -1$. Recuerde que $+1$ y -1 suman 0.



Ahora es posible restar o *eliminar* los dos -1, como se muestra:

De esto, se observa que queda $3 + 2$ o 5. Entonces, $3 -(-2) = 5$.

EJEMPLO 6 Restar 12 de 3.

Solución

$$3 - 12 = 3 + (-12) = -9$$

SUGERENCIA

En el ejemplo 6 se pidió "restar 12 de 3". Probablemente usted esperaba que esto se escribiera como 12 − 3, debido a la costumbre de obtener un número positivo. Sin embargo, la forma correcta de escribir lo anterior es 3 − 12. Observe que el número que sigue a la palabra "de" es el punto de arranque. Ahí es donde el cálculo comienza. Por ejemplo:

Restar 2 de 7 significa $7 - 2$.	De 7 restar 2, quiere decir $7 - 2$.
Restar 5 de -1 es $-1 - 5$.	De -1 restar 5, significa $-1 - 5$.
Restar -4 de -2 quiere decir $-2 - (-4)$.	De -2 restar -4, quiere decir $-2 - (-4)$.
Sustraer -3 de 6 quiere decir $6 - (-3)$.	De 6 sustraer -3, significa $6 - (-3)$.
Restar a de b significa $b - a$.	De a restar b, quiere decir $a - b$.

EJEMPLO 7 Restar 5 de 5.

Solución

$$5 - 5 = 5 + (-5) = 0$$

EJEMPLO 8 Restar −6.48 de 4.25.

Solución

$$4.25 - (-6.48) = 4.25 + 6.48 = 10.73$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 65

Ahora se llevarán a cabo problemas que contienen fracciones.

EJEMPLO 9 Restar $\frac{5}{9} - \frac{13}{15}$

Solución Se comienza con el cambio de un problema de sustracción a otro de suma.

$$\frac{5}{9} - \frac{13}{15} = \frac{5}{9} + \left(-\frac{13}{15}\right)$$

Ahora reescribimos las fracciones con mcd, 45, y sumamos como se hizo en la última sección.

$$\frac{5}{9} + \left(-\frac{13}{15}\right) = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{5} + \left(-\frac{13}{15}\right)\cdot\frac{3}{3}$$

$$= \frac{25}{45} + \left(-\frac{39}{45}\right) = \frac{25 + (-39)}{45} = \frac{-14}{45} = -\frac{14}{45}$$

Así, $\frac{5}{9} - \frac{13}{15} = -\frac{14}{45}$.

EJEMPLO 10 Reste $-\frac{7}{18}$ de $-\frac{9}{15}$.

Solución Este problema se escribe como $-\frac{9}{15} - \left(-\frac{7}{18}\right)$.

Esto se simplifica como sigue.

$$-\frac{9}{15} - \left(-\frac{7}{18}\right) = -\frac{9}{15} + \frac{7}{18}.$$

El mcd de 15 y 18 es 90. Al reescribir las fracciones con el común denominador, queda

$$-\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{6} + \frac{7}{18}\cdot\frac{5}{5} = -\frac{54}{90} + \frac{35}{90} = \frac{-54 + 35}{90}$$

$$= \frac{-19}{90} = -\frac{19}{90}.$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 87

Se verán algunas aplicaciones que involucran la sustracción.

EJEMPLO 11 **Saldo del libro contable** El libro de contabilidad de Duncan indica un saldo de $237 antes de hacer un cheque de $364. Encuentre el nuevo saldo en su libro contable.

Solución Entender y traducir Se obtiene el nuevo saldo al restar 364 de 237.

Calcular $237 - 364 = 237 + (-364) = -127$

Revisar y resolver El signo negativo indica un déficit, que era lo que esperábamos. Por tanto, hay un sobregiro de $127.

EJEMPLO 12 **Diferencia de temperatura** El 1 de febrero de 2002, la temperatura mínima del día en Honolulu, Hawai, fue de 72 ºF. En el mismo día, la temperatura mínima en Delta Junction, Alaska (al final de la Autopista de Alaska, alrededor de 80 millas al sureste de Fairbanks), fue de −23 ºF. Encuentre la diferencia de temperaturas.

Solución Entender y traducir La palabra “diferencia” en el título del ejemplo indica una resta. La diferencia de temperaturas se obtiene con la siguiente sustracción.

Calcular $72 - (-23) = 72 + 23 = 95$

Revisar y responder Por tanto, la temperatura en Honolulu fue 95 ºF mayor que la de Delta Junction.

EJEMPLO 13 **Medición de la precipitación pluvial** Se colocó un pluviómetro en el patio de una casa en Beverly Broomell, y no se toca durante 2 días. Suponga que en el primer día cayeron $2\frac{1}{4}$ pulgadas de lluvia. En el segundo día no cayó lluvia, pero se evaporó $\frac{3}{8}$ de pulgada de la lluvia del primer día.

¿Cuánta agua queda en el pluviómetro después del segundo día?

Solución Entender y traducir De la primera cantidad, $2\frac{1}{4}$ pulgadas, se debe restar $\frac{3}{8}$ de pulgada.

Calcular Comenzamos con el cambio de un problema de sustracción a otro de suma. Después cambiamos el número mixto a una fracción, y reescribimos cada fracción con su mcd, 8.

$$
\begin{aligned}
2\frac{1}{4}-\frac{3}{8} &= 2\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{8}\right)\\
&= \frac{9}{4}+\left(-\frac{3}{8}\right)\\
&= \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)\\
&= \frac{18}{8}+\left(-\frac{3}{8}\right)\\
&= \frac{18+(-3)}{8}=\frac{15}{8} \quad \text{o bien} \quad 1\frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

Revisar y responder Así, después del segundo día quedó $1\frac{7}{8}$ pulgadas de agua en el pluviómetro. Con base en los números dados en el problema, la respuesta parece razonable.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 135

EJEMPLO 14 Evalúe

a) $15+(-4)$ **b)** $-16-3$ **c)** $19+(-14)$

d) $7-(-9)$ **e)** $-9-(-3)$ **f)** $8-13$

Solución Los incisos **a)** y **b)** son problemas de suma, mientras que los demás incisos son restas. Podemos reescribir cada problema de sustracción como uno de suma para evaluarlo.

a) $15+(-4)=11$ **b)** $-16-3=-16+(-3)=-19$

c) $19+(-14)=5$ **d)** $7-(-9)=7+9=16$

e) $-9-(-3)=-9+3=-6$ **f)** $8-13=8+(-13)=-5$

2 Restar números en forma mental

En los ejercicios anteriores cambiamos los problemas de resta por problemas de suma. Hicimos esto debido a que sabíamos sumar números reales. Después de este capítulo, cuando resolvamos un problema de resta, no mostraremos este paso. *Usted necesita practicar y comprender la forma de sumar y restar números reales. Debe comprender este material tal que, al pedírsele que evalúe una expresión como* $-4-6$, *pueda calcular la respuesta mentalmente. Debe comprender que* $-4-6$ *significa lo mismo que* $-4+(-6)$, *pero no necesita escribir los cálculos para encontrar el valor de la expresión,* -10.

Evaluaremos algunos problemas de resta sin mostrar el proceso de cambio, de resta a suma.

EJEMPLO 15 Evalúe.

a) $-7-5$ **b)** $4-12$ **c)** $18-25$ **d)** $-20-12$

Solución **a)** $-7-5=-12$ **b)** $4-12=-8$

c) $18-25=-7$ **d)** $-20-12=-32$

En el ejemplo 15 **a)**, podríamos haber razonado que $-7-5$ significa $-7+(-5)$, que es -12, pero no necesitamos mostrar todo el proceso.

EJEMPLO 16 Evalúe $-\frac{3}{5}-\frac{7}{8}$.

Solución El mínimo común denominador es 40. Escriba cada fracción con el mcd, 40.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 79

$$-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{8}-\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{5}=-\frac{24}{40}-\frac{35}{40}=\frac{-24-35}{40}=-\frac{59}{40}=-1\frac{19}{40}$$

Observe que en el ejemplo 16, cuando sumamos $-\frac{24}{40}-\frac{35}{40}$, pudimos haber escrito $\frac{-24+(-35)}{40}$, pero en este momento decidimos escribir $\frac{-24-35}{40}$ porque $-24-35$ es -59, la respuesta es $-\frac{59}{40}$ o bien $-1\frac{19}{40}$.

3 Evaluar expresiones que contienen más de dos números

Al evaluar expresiones que involucran más de una suma o resta, se trabaja de izquierda a derecha, a menos que haya paréntesis u otros símbolos de agrupación.

EJEMPLO 17 Evaluar

a) $-5-13-4$ **b)** $-3+1-7$ **c)** $8-10+2$

Solución Se trabaja de izquierda a derecha.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 11

a) $\underbrace{-5-13}-4$
$=-18-4$
$=-22$

b) $\underbrace{-3+1}-7$
$=-2-7$
$=-9$

c) $\underbrace{8-10}+2$
$=-2+2$
$=0$

A partir de esta sección, por lo general no escribiremos expresiones como $3+(-4)$ sino $3-4$. Recuerde que $3-4$ significa $3+(-4)$, de acuerdo con nuestra definición de resta. **Siempre que veamos una expresión del tipo *a* + (−*b*), podremos escribirla como *a* − *b*.** Por ejemplo, $12+(-15)$ se escribe $12-15$, y $-6+(-9)$ se escribe $-6-9$.

Como ya dijimos, **siempre que veamos una expresión de la forma *a* − (−*b*), podemos reescribir como *a* + *b*.** Por ejemplo, $6-(-13)$ se reescribe $6+13$, y $-12-(-9)$ se escribe $-12+9$. Con el uso de ambos conceptos, la expresión $9+(-12)-(-8)$ se simplifica como $9-12+8$.

EJEMPLO 18 **a)** Evaluar $-5-(-9)+(-12)+(-3)$.

b) Simplificar la expresión del inciso **a)**.

c) Evaluar la expresión simplificada en el inciso **b)**.

Solución **a)** Se trabaja de izquierda a derecha. Las áreas sombreadas indican las sumas que se realizan para obtener el siguiente paso.

$$\begin{aligned}-5-(-9)+(-12)+(-3)&=\boxed{-5+9}+(-12)+(-3)\\&=\boxed{4+(-12)}+(-3)\\&=-8+(-3)\\&=-11\end{aligned}$$

b) La expresión se simplifica como sigue:

$$-5-(-9)+(-12)+(-3)=-5+9-12-3$$

c) Evaluar la expresión simplificada de izquierda a derecha. Comenzamos por sumar $-5+9$ para obtener 4.

$$\begin{aligned}-5+9-12-3&=4-12-3\\&=-8-3\\&=-11\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 125

Al llegar a una expresión como la del ejemplo 18 **a)** debemos simplificarla como se hizo en el inciso **b)**, y después evaluar la expresión simplificada.

Uso de la calculadora

Resta con una calculadora científica

En el recuadro de Uso de la calculadora de la página 49, indicamos que la tecla $\boxed{+/-}$ por lo general se oprime después de introducir un número para hacer que éste sea negativo. A continuación presentaremos algunos ejemplos de resta en una calculadora científica.

Evaluar	Teclas	Respuesta en pantalla
$-5-8$	$5\ \boxed{+/-}\ \boxed{-}\ 8\ \boxed{=}$	-13
$2-(-7)$	$2\ \boxed{-}\ 7\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$	9

Resta con una calculadora graficadora

En el recuadro Uso de la calculadora graficadora, mencionamos que en una calculadora graficadora debemos oprimir la tecla $\boxed{(-)}$ antes de introducir el número para que éste sea negativo. La tecla $\boxed{-}$ de las calculadoras graficadoras se emplea para restar. Los siguientes son algunos ejemplos de resta en ellas.

Evaluar	Teclas	Respuesta en pantalla
$-5-8$	$\boxed{(-)}\ 5\ \boxed{-}\ 8\ \boxed{\text{ENTER}}$	-13
$2-(-7)$	$2\ \boxed{-}\ \boxed{(-)}\ 7\ \boxed{\text{ENTER}}$	9

Conjunto de ejercicios 1.7

Ejercicios conceptuales

1. Escriba una expresión que ilustre 7 restado de 2.
2. Escriba una expresión que ilustre -6 restado de -4.
3. Escriba una expresión que denote * restado de ☐.
4. Escriba una expresión para ilustrar ? restado de ☺.
5. **a)** Explique en sus propias palabras cómo restar un número b de un número a.

   b) Escriba una expresión en la que se utilice la suma para restar 14 de 5.

   c) Evalúe la expresión que determinó en el inciso **b)**.
6. **a)** Exprese la resta $a-(-b)$ en forma simplificada.

   b) Escriba una expresión simplificada que se utilice para evaluar $-4-(-12)$.

   c) Evalúe la expresión simplificada que se obtuvo en el inciso **b)**.
7. **a)** Exprese la resta $a-(+b)$ en forma simplificada.

   b) Simplifique la expresión $7-(+9)$.

   c) Evalúe la expresión simplificada que obtuvo en el inciso **b)**.
8. Cuando se suman tres números o más sin paréntesis, ¿cómo se evalúa la expresión?

1 Multiplicar números

Al multiplicar dos números, se utilizan las siguientes reglas para determinar el signo del producto.

Signo del producto de dos números reales

1. El producto de dos números con signos **iguales** es un número **positivo**.
2. El producto de dos números con signos **diferentes** es un número **negativo**.

Según esta regla, el producto de dos números positivos o de dos número negativos será positivo. El producto de un número positivo y uno negativo será un número negativo.

EJEMPLO 1 Evalúe lo siguiente.

a) $4(-5)$ **b)** $(-6)(7)$ **c)** $(-9)(-3)$

Solución **a)** Como los números tienen signos diferentes, el producto es negativo.

$$4(-5) = -20$$

b) Como los números tienen signos diferentes, el producto es negativo.

$$(-6)(7) = -42$$

c) Como los números tienen signos iguales, ambos son negativos, el producto es positivo.

$$(-9)(-3) = 27$$

EJEMPLO 2 Evalúe lo siguiente.

a) $(-8)(5)$ **b)** $(-4)(-8)$ **c)** $4(-9)$ **d)** $0(6)$ **e)** $0(-2)$ **f)** $-3(-6)$

Solución **a)** $(-8)(5) = -40$ **b)** $(-4)(-8) = 32$ **c)** $4(-9) = -36$

d) $0(6) = 0$ **e)** $0(-2) = 0$ **f)** $-3(-6) = 18$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 29

Observe que el cero multiplicado por cualquier número real, es cero.

SUGERENCIA

En este momento, ciertos estudiantes comienzan a confundir problemas como $-2\ -3$ con $(-2)(-3)$ y como $2 - 3$ con $2(-3)$. Si no comprende la diferencia entre $-2\ -3$ y $(-2)(-3)$, haga una cita con su profesor tan pronto como sea posible.

Problemas de resta	Problemas de multiplicación
$-2 - 3 = -5$	$(-2)(-3) = 6$
$2 - 3 = -1$	$(2)(-3) = -6$

EJEMPLO 3 Evalúe lo siguiente

a) $\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)$ **b)** $\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)$.

Solución **a)** $\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{(-1)(-3)}{8(5)} = \frac{3}{40}$ **b)** $\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{3(-3)}{20(10)} = -\frac{9}{200}$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 41

En ciertos problemas se le pedirá que realice más de una multiplicación. Cuando esto ocurra, puede determinar el signo del producto final contando la cantidad de números negativos por multiplicar. *El producto de una cantidad par de números negativos siempre será positivo. El producto de una cantidad impar de números negativos siempre será negativo.* ¿Puede explicar por qué?

EJEMPLO 4 Evalúe lo siguiente.

a) $(-4)(3)(-2)(-1)$ **b)** $(-3)(2)(-1)(-2)(-4)$

Solución **a)** Como hay tres números negativos (número impar), el producto será negativo, según se ilustra.

$$\begin{aligned}(-4)(3)(-2)(-1) &= (-12)(-2)(-1)\\ &= (24)(-1)\\ &= -24\end{aligned}$$

b) Como hay cuatro números negativos (número par), el producto será positivo.

$$\begin{aligned}(-3)(2)(-1)(-2)(-4) &= (-6)(-1)(-2)(-4)\\ &= (6)(-2)(-4)\\ &= (-12)(-4)\\ &= 48\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 35

2 Dividir números

Las reglas para dividir números son muy similares a las que se utilizan para multiplicarlos.

El signo del cociente de dos números reales

1. El cociente de dos números con signos **iguales** es un número positivo.
2. El cociente de dos números con signos **diferentes** es un número negativo.

Por lo tanto, el cociente de dos números positivos o dos negativos siempre será un número positivo. El cociente de un número positivo y uno negativo, será negativo.

EJEMPLO 5 Evalúe lo siguiente.

a) $\dfrac{10}{-5}$ **b)** $\dfrac{-45}{5}$ **c)** $\dfrac{-36}{-6}$

Solución **a)** Como los números tienen signos distintos, el cociente es negativo.

$$\frac{10}{-5} = -2$$

b) Como los números tienen signos diferentes, el cociente es negativo.

$$\frac{-45}{5} = -9$$

c) Los signos de los números son iguales, por tanto, el cociente es positivo.

$$\frac{-36}{-6} = 6$$

EJEMPLO 6 Evalúe lo siguiente **a)** $-16 \div (-2)$ **b)** $\frac{-2}{3} \div \frac{-5}{7}$

Solución **a)** Como los números tienen signos iguales, ambos negativos, el cociente es positivo.

$$\frac{-16}{-2} = 8$$

b) El *divisor* $\frac{-5}{7}$, se invierte, y después se multiplica.

$$\frac{-2}{3} \div \frac{-5}{7} = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{7}{-5}\right) = \frac{-14}{-15} = \frac{14}{15}$$

SUGERENCIA

Para multiplicar y dividir dos números reales:

$$\left.\begin{array}{l} (+)(+) = + \\ (-)(-) = + \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{(+)}{(+)} = + \\ \dfrac{(-)}{(-)} = + \end{array}\right\}$$

Signos iguales dan productos y cocientes positivos.

$$\left.\begin{array}{l} (+)(-) = - \\ (-)(+) = - \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{(+)}{(-)} = - \\ \dfrac{(-)}{(+)} = - \end{array}\right\}$$

Signos diferentes dan productos y cocientes negativos.

3 Eliminar signos negativos de los denominadores

Ahora sabemos que el cociente de un número positivo y uno negativo es un número negativo. Las fracciones $-\frac{3}{4}$, $\frac{-3}{4}$ y $\frac{3}{-4}$ representan el mismo número negativo, que es tres cuartos negativos.

Si a y b representan cualesquiera números reales, $b \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

En matemáticas, por lo general no escribimos una fracción con el signo negativo en el denominador. Cuando en el denominador aparece un signo negativo, se puede trasladar al numerador o colocarlo frente a la fracción. Por ejemplo, la fracción $\frac{5}{-7}$ debe escribirse como $-\frac{5}{7}$ o $\frac{-5}{7}$. Las fracciones también pueden escribirse con una diagonal, /. Por ejemplo, la fracción $-\frac{5}{7}$ puede escribirse como $-5/7$ o $-(5/7)$.

EJEMPLO 7 Evalúe lo siguiente $\frac{2}{5} \div \left(\frac{-8}{15}\right)$.

Solución

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 73

$$\frac{2}{5} \div \left(\frac{-8}{15}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \left(\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{-8}}}\right) = \frac{1(3)}{1(-4)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

La tabla 1.1 resume las operaciones con los números reales.

TABLA 1.1 Resumen de las operaciones con los números reales

Signos de los números	Suma	Resta	Multiplicación	División
Ambos números son positivos	La suma siempre es positiva	La diferencia puede ser positiva o negativa	El producto siempre es positivo	El cociente siempre es positivo
Ejemplos				
6 y 2	$6 + 2 = 8$	$6 - 2 = 4$	$6 \cdot 2 = 12$	$6 \div 2 = 3$
2 y 6	$2 + 6 = 8$	$2 - 6 = -4$	$2 \cdot 6 = 12$	$2 \div 6 = \frac{1}{3}$
Un número es positivo y el otro es negativo	La suma puede ser positiva o negativa	La diferencia puede ser positiva o negativa	El producto siempre es negativo	El cociente siempre es negativo
Ejemplos				
6 y −2	$6 + (-2) = 4$	$6 - (-2) = 8$	$6(-2) = -12$	$6 \div (-2) = -3$
−6 y 2	$-6 + 2 = -4$	$-6 - 2 = -8$	$-6(2) = -12$	$-6 \div 2 = -3$
Ambos números son negativos	La suma siempre es negativa	La diferencia puede ser positiva o negativa	El producto siempre es positivo	El cociente siempre es positivo
Ejemplos				
−6 y −2	$-6 + (-2) = -8$	$-6 - (-2) = -4$	$-6(-2) = 12$	$-6 \div (-2) = 3$
−2 y −6	$-2 + (-6) = -8$	$-2 - (-6) = 4$	$-2(-6) = 12$	$-2 \div (-6) = \frac{1}{3}$

4 Evaluar divisiones que involucran al 0

Ahora analizaremos las divisiones que involucran al número 0. ¿A qué es igual $\frac{0}{1}$? Observe que $\frac{6}{3} = 2$ porque $3 \cdot 2 = 6$. Podemos seguir el mismo procedimiento para determinar el valor de $\frac{0}{1}$. Supongamos que $\frac{0}{1}$ es igual a cierto número, que se designará con $\boxed{?}$.

$$\text{Si} \quad \frac{0}{1} = \boxed{?} \quad \text{entonces} \quad 1 \cdot \boxed{?} = 0$$

Como sólo $1 \cdot 0 = 0$ el signo $\boxed{?}$ debe ser 0. Por tanto, $\frac{0}{1} = 0$. Con la misma técnica se demuestra que cero dividido entre cualquier número distinto de 0 es igual a cero.

> Si a representa cualquier número real excepto 0, entonces
>
> $$0 \div a = \frac{0}{a} = 0$$

Ahora, ¿a que es igual $\frac{1}{0}$?

$$\text{Si} \quad \frac{1}{0} = \boxed{?} \quad \text{entonces} \quad 0 \cdot \boxed{?} = 1$$

Como 0 multiplicado por cualquier número será 0, no hay un valor que pueda reemplazar a $\boxed{?}$. Se dice que $\frac{1}{0}$ es **indefinido**. Con la misma técnica, se demuestra que cualquier número real, excepto 0, dividido entre 0, es indefinido.

Si a representa cualquier número real excepto 0, entonces

$$a \div 0 \quad \text{o} \quad \frac{a}{0} \quad \text{es } \textbf{indefinido}$$

¿A qué es igual $\frac{0}{0}$?

$$\text{Si} \quad \frac{0}{0} = \boxed{?} \quad \text{entonces} \quad 0 \cdot \boxed{?} = 0$$

Pero como el producto de cualquier número y 0 es igual a 0, el signo $\boxed{?}$ se reemplaza por cualquier número real. Por tanto, el cociente $\frac{0}{0}$ no puede determinarse, por lo que no existe respuesta. Entonces, no se le usará en este curso.*

Resumen de la división que involucra a 0

Si a representa cualquier número real excepto 0, entonces

$$\frac{0}{a} = 0 \qquad \frac{a}{0} \text{ es indefinido}$$

EJEMPLO 8 Indique si cada cociente es 0 o indefinido.

a) $\frac{0}{2}$ **b)** $\frac{5}{0}$ **c)** $\frac{0}{-4}$ **d)** $\frac{-2}{0}$

Solución La respuesta de los incisos **a)** y **c)** es 0. La respuesta a los incisos **b)** y **d)** es indefinida.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 95

Uso de la calculadora

Multiplicación y división con una calculadora científica

A continuación se muestra cómo multiplicar y dividir en una calculadora.

Evaluar	Teclas	Respuesta en pantalla
$6(-23)$	$6 \boxed{\times} 23 \boxed{+/-} \boxed{=}$	-138
$\frac{-240}{-16}$	$240 \boxed{+/-} \boxed{\div} 16 \boxed{+/-} \boxed{=}$	15

Multiplicación y división en una calculadora graficadora

Evaluar	Teclas	Respuesta en pantalla
$6(-23)$	$6 \boxed{\times} \boxed{(-)} 23 \boxed{\text{ENTER}}$	-138
$\frac{-240}{-16}$	$\boxed{(-)} 240 \boxed{\div} \boxed{(-)} 16 \boxed{\text{ENTER}}$	15

Como un número positivo multiplicado por uno negativo será otro negativo, para obtener el producto de $6(-23)$ se multiplica $(6)(23)$ y se escribe un signo negativo antes de la respuesta. Como un número negativo dividido entre otro negativo es uno positivo, hubiera podido encontrarse $\frac{-240}{-16}$ con la división de $\frac{240}{16}$.

*En este nivel, algunos profesores prefieren llamar a $\frac{0}{0}$ *indeterminado* mientras que otros prefieren llamarlo indefinido. En cursos de matemáticas de nivel superior, en ocasiones se llama a $\frac{0}{0}$ *forma indeterminada*.

Actividad en grupo

Como grupo, analicen y resuelvan el ejercicio 145, de acuerdo con las instrucciones.

145. **a)** Cada miembro del grupo ha de seguir este procedimiento por separado. En este momento, no comunique su número a los demás integrantes de su grupo.

1. Escoja un número entre 2 y 10.
2. Multiplique su número por 9.
3. Sume los dos dígitos del producto.
4. Reste 5 de la suma anterior.
5. Ahora, elija la letra del alfabeto que corresponda a la diferencia que halló. Por ejemplo, 1 es a, 2 es b, 3 es c, y así sucesivamente.
6. Elija el nombre de un país (de *una palabra)* que comience con dicha letra.
7. Ahora, elija el nombre de un animal (de *una palabra)* que empiece con la última letra del país que eligió.
8. Por último, escoja un color que inicie con la última letra del animal que seleccionó.

b) Ahora comparta su respuesta final con los otros miembros de su grupo. ¿Obtuvieron la misma respuesta?

c) La mayoría de personas obtienen la respuesta *amarillo*. Como grupo, escriban un párrafo o dos para explicar por qué.

Ejercicios de aprendizaje acumulativo

[1.3] **146.** Encuentre el cociente de $\frac{5}{7} \div \frac{1}{5}$.

[1.7] **147.** Reste -18 de -20.

148. Evalúe $6 - 3 - 4 - 2$.

149. Evalúe $5 - (-2) + 3 - 7$.

[1.8] **150.** Evalúe $-40 \div (-8)$.

1.9 EXPONENTES, PARÉNTESIS Y ORDEN DE LAS OPERACIONES

1. Aprender el significado de los exponentes.
2. Evaluar expresiones que contengan exponentes.
3. Aprender la diferencia entre $-x^2$ y $(-x)^2$.
4. Aprender el orden de las operaciones.
5. Conocer el uso de los paréntesis.
6. Evaluar expresiones que contengan variables.

1 Aprender el significado de los exponentes

Para comprender ciertos temas de álgebra, deben entenderse los exponentes. En esta sección se introducen los exponentes y se analizan con más detalle en el capítulo 4.

En la expresión 4^2, el 4 se llama **base**, y el 2 es el **exponente**. El número 4^2 se lee "cuatro al cuadrado" o "4 elevado a la segunda potencia", y significa

base

$$\underbrace{4 \cdot 4}_{\text{2 factores de 4}} = 4^2 \leftarrow \text{exponente}$$

El número 4^3 se lee "cuatro al cubo", o "4 a la tercera potencia", y significa

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{3 factores de 4}} = 4^3$$

En general, el número b elevado a la n-ésima potencia, se escribe b^n, y significa

$$\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ factores de } b} = b^n$$

Así, $b^4 = b \cdot b \cdot b \cdot b$, o bien $bbbb$, y $x^3 = x \cdot x \cdot x$ o bien xxx.

2 Evaluar expresiones que contengan exponentes

Ahora evaluaremos algunas expresiones que contienen exponentes.

EJEMPLO 1 Evaluar **a)** 3^2 **b)** 2^5 **c)** 1^5 **d)** $(-6)^2$ **e)** $(-2)^3$ **f)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Solución

a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

b) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

c) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ (1 elevado a cualquier potencia da 1; ¿por qué?)

d) $(-6)^2 = (-6)(-6) = 36$

e) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 29

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

No es necesario escribir exponentes que sean 1. Por lo tanto, xxy, se escribe x^2y y no x^2y^1. **Siempre que se vea una letra o número sin exponente, asumiremos que su exponente es 1.**

Ejemplos de notación exponencial

a) $xyxx = x^3y$	**b)** $xyzzy = xy^2z^2$
c) $3aabbb = 3a^2b^3$	**d)** $5xyyyy = 5xy^4$
e) $4 \cdot 4rrs = 4^2r^2s$	**f)** $5 \cdot 5 \cdot 5mmn = 5^3m^2n$

Observe en los incisos **a)** y **b)** que el orden de los factores no importa.

SUGERENCIA

Observe que $x + x + x + x + x + x = 6x$ y que $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$. Tenga cuidado de no confundir la suma con la multiplicación.

3 Aprender la diferencia entre $-x^2$ y $(-x)^2$

Un exponente se refiere sólo al número o letra que lo precede en forma directa, a menos que utilicemos paréntesis para indicar otra cosa. Por ejemplo, en la expresión $3x^2$, sólo la x está elevada al cuadrado. En la expresión $-x^2$ sólo la x está al cuadrado. Podría escribirse $-x^2$ como $-1\,x^2$ porque es posible multiplicar cualquier número real por 1 sin que se afecte su valor.

$$-x^2 = -1x^2$$

Al considerar la expresión $-1\,x^2$ observamos que sólo la x está al cuadrado, no el -1. Si toda la expresión de $-x$ fuera a elevarse al cuadrado, sería necesario emplear paréntesis y escribir $(-x)^2$. Observe la diferencia en los dos ejemplos siguientes:

$$-x^2 = -(x)(x)$$
$$(-x)^2 = (-x)(-x)$$

Considere las expresiones -3^2 y $(-3)^2$. ¿En qué difieren?

$$-3^2 = -(3)(3) = -9$$
$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

SUGERENCIA La expresión $-x^2$ se lee "menos x cuadrada", o "el opuesto de x al cuadrado". La expresión $(-x)^2$ se lee "menos x al cuadrado".

EJEMPLO 2 Evalúe. **a)** -5^2 **b)** $(-5)^2$ **c)** -2^3 **d)** $(-2)^3$

Solución **a)** $-5^2 = -(5)(5) = -25$ **b)** $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

c) $-2^3 = -(2)(2)(2) = -8$ **d)** $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

EJEMPLO 3 Evalúe. **a)** -2^4 **b)** $(-2)^4$

Solución **a)** $-2^4 = -(2)(2)(2)(2) = -16$ **b)** $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 105

Uso de la calculadora

Empleo de las teclas $\boxed{x^2}$, $\boxed{y^x}$ y $\boxed{\wedge}$

La tecla $\boxed{x^2}$ se utiliza para elevar un valor al cuadrado. Por ejemplo, para evaluar 5^2 se haría lo siguiente.

	Teclas	Respuesta en pantalla
Calculadora científica	$5\ \boxed{x^2}$	25
Calculadora graficadora	$5\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{ENTER}}$	25

Para evaluar $(-5)^2$ en una calculadora, se haría lo siguiente.

	Teclas	Respuesta en pantalla
*Calculadora científica	$5\ \boxed{+/-}\ \boxed{x^2}$	25
Calculadora graficadora	$\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ 5\ \boxed{)}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{ENTER}}$	25

Para elevar un valor a una potencia mayor que 2, utilizamos la tecla $\boxed{y^x}$* o la tecla $\boxed{\wedge}$. Para utilizarlas, introducimos el número y después oprimimos ya sea la tecla $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$, y después introducimos el exponente. A continuación se muestra cómo evaluar 2^5 y $(-2)^5$.

	Evaluar	Teclas	Respuesta en pantalla
Calculadora científica	2^5	$2\ \boxed{y^x}\ 5\ \boxed{=}$	32
*Calculadora científica	$(-2)^5$	$2\ \boxed{+/-}\ \boxed{y^x}\ 5\ \boxed{=}$ **	-32
Calculadora graficadora	2^5	$2\ \boxed{\wedge}\ 5\ \boxed{\text{ENTER}}$	32
Calculadora graficadora	$(-2)^5$	$\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ 2\ \boxed{)}\ \boxed{\wedge}\ 5\ \boxed{\text{ENTER}}$	-32

Es posible que la manera más fácil de elevar números negativos a una potencia, sea elevar el número positivo a la potencia y después escribir un signo menos antes de la respuesta final, si fuera necesario. *Un número negativo elevado a una potencia impar será negativo, y un número negativo elevado a una potencia par será positivo.* ¿Puede explicar por qué?

* Algunas calculadoras científicas muy recientes tienen una tecla $\boxed{(-)}$. En ellas, para evaluar una expresión negativa elevada a una potencia, siga las instrucciones correspondientes a la calculadora graficadora.

** Algunas calculadoras tienen una tecla $\boxed{x^y}$ en lugar de otra $\boxed{y^x}$.

4 Aprender el orden de las operaciones

Ahora que se introdujeron los exponentes, es posible presentar el **orden de las operaciones**. ¿Puede evaluar $2 + 3 \cdot 4$? ¿Es 20 o 14? Para responder esta pregunta debemos conocer el orden de las operaciones por seguir cuando evaluemos una expresión matemática. Con frecuencia tenemos que evaluar expresiones que contienen operaciones múltiples.

Orden de las operaciones
Para evaluar expresiones matemáticas, se usa el siguiente orden

1. Primero evalúe la información dentro de los **paréntesis** ( ), corchetes [ ], o llaves { }. Estos se llaman **símbolos de agrupación**, porque agrupan información. Una barra de fracción, —, también sirve como símbolo de agrupación. Si la expresión contiene paréntesis anidados (un par de paréntesis dentro de otro), primero evalúe la información en los paréntesis internos.
2. A continuación, evalúe todos los **exponentes**.
3. Luego, evalúe todas las **multiplicaciones** o **divisiones** en el orden en que suceden de izquierda a derecha.
4. Por último, evalúe todas las **adiciones** o **sustracciones** en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.

Algunos estudiantes recuerdan la palabra PEMDAS o la frase "Pedro Escucha Mientras Dos Alumnos Sonríen" para ayudarse a recordar el orden: **P**aréntesis, **E**xponentes, **M**ultiplicación, **D**ivisión, **A**dición, **S**ustracción. Recuerde que esto no implica hacer la multiplicación antes que la división o la suma antes que la sustracción.

Ahora se puede evaluar $2 + 3 \cdot 4$. Como las multiplicaciones se llevan a cabo antes que las adiciones,

$$2 + 3 \cdot 4 \quad \text{significa} \quad 2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = 14$$

Uso de la calculadora

Ahora sabemos que $2 + 3 \cdot 4$ significa $2 + (3 \cdot 4)$ y tiene un valor de 14. ¿Qué desplegaría una calculadora al introducir la siguiente secuencia de teclas?

$$2 \; \boxed{+} \; 3 \; \boxed{\times} \; 4 \; \boxed{=}$$

La respuesta depende de la calculadora. *Las calculadoras científicas y graficadoras* evaluarán una expresión de acuerdo con las reglas que se acaban de dar.

	Teclas	Respuesta en pantalla
Calculadora científica	$2 \; \boxed{+} \; 3 \; \boxed{\times} \; 4 \; \boxed{=}$	14
Calculadora graficadora	$2 \; \boxed{+} \; 3 \; \boxed{\times} \; 4 \; \boxed{\text{ENTER}}$	14

Las calculadoras que no son científicas ejecutarán las operaciones en el orden en que se introducen.

		Respuesta en pantalla
Calculadora no científica	$2 \; \boxed{+} \; 3 \; \boxed{\times} \; 4 \; \boxed{=}$	20

Recuerde que en álgebra, a menos que se diga otra cosa por medio de paréntesis, siempre se ejecutarán las multiplicaciones y divisiones antes que las sumas y restas. En este curso, debe utilizar una calculadora científica o graficadora.

5 Conocer el uso de los paréntesis

Los paréntesis o corchetes se emplean para (1) cambiar el orden que debe seguirse en las operaciones para evaluar una expresión algebraica, o (2) ayudar a aclarar la comprensión de una expresión.

Para evaluar la expresión $2 + 3 \cdot 4$, lo normal sería realizar primero la multiplicación, $3 \cdot 4$. Si quisiéramos ejecutar la suma antes de la multiplicación, eso se indicaría con la colocación de paréntesis alrededor de $2+3$, así:

$$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

Considere la expresión $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$. De acuerdo con el orden de las operaciones, se realizan las multiplicaciones antes de las adiciones. Esta expresión puede reescribirse como $(1 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$. Observe que el orden de las operaciones no cambió. Sólo se utilizaron los paréntesis para ayudar a aclarar el orden a seguir.

En ocasiones es necesario utilizar más de un conjunto de paréntesis para indicar el orden que se debe seguir en una expresión. Como se indica en el paso 1 del recuadro de Orden de las operaciones, cuando un conjunto de paréntesis se encuentra dentro de otro reciben el nombre de **paréntesis anidados**. Por ejemplo, la expresión $6(2 + 3(4 + 1))$ tiene paréntesis anidados. Con frecuencia, para hacer que una expresión con paréntesis anidados sea más fácil de seguir, se emplean corchetes, [ ], o llaves, { }, en lugar de paréntesis múltiples. Así, la expresión $6(2 + 3(4 + 1))$ podría escribirse como $6[2 + 3(4 + 1)]$. Siempre que se da una expresión con paréntesis anidados, se evalúan *primero* los números en *el paréntesis más interior*. En los siguientes ejemplos se emplea sombra de color para indicar el orden en que se evalúa la expresión.

$$6[2 + 3(4 + 1)] = 6[2 + 3(5)] = 6[2 + 15] = 6[17] = 102$$

$$4[3(6 - 4) \div 6] = 4[3(2) \div 6] = 4[6 \div 6] = 4[1] = 4$$

$$\{2 + [(8 \div 4)^2 - 1]\}^2 = [2 + (2^2 - 1)]^2 = [2 + (4 - 1)]^2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

Ahora, se resolverán algunos ejemplos, pero antes de hacerlo lea la siguiente Sugerencia.

SUGERENCIA Si no se usan paréntesis para cambiar el orden de las operaciones, siempre se hacen primero las multiplicaciones y divisiones, antes de las sumas y restas. Si un problema sólo tiene multiplicaciones y divisiones, se trabaja de izquierda a derecha. De manera similar, si un problema sólo tiene sumas y restas, se resuelve de izquierda a derecha.

EJEMPLO 4 Evaluar $6 + 3 \cdot 5^2 - 4$.

Solución Se emplea sombra de color para indicar el orden en que se evaluará la expresión.

$$\begin{aligned} &6 + 3 \cdot 5^2 - 4 && \textit{Exponente.} \\ &= 6 + 3 \cdot 25 - 4 && \textit{Multiplicar.} \\ &= 6 + 75 - 4 && \textit{Sumar y restar, de izquierda a derecha.} \\ &= 81 - 4 \\ &= 77 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Evaluar $6 + 3[(32 \div 4^2) + 5]$.

Solución

$$\begin{aligned} & 6 + 3[(32 \div \boxed{4^2}) + 5] && \textit{Exponente.} \\ &= 6 + 3[(\boxed{32 \div 16}) + 5] && \textit{Dividir.} \\ &= 6 + 3[\boxed{2 + 5}] && \textit{Sumar.} \\ &= 6 + \boxed{3[7]} && \textit{Multiplicar.} \\ &= 6 + 21 \\ &= 27 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evaluar $(8 \div 2) + 7(5 - 2)^2$.

Solución

$$\begin{aligned} & \boxed{(8 \div 2)} + 7(\boxed{5 - 2})^2 && \textit{Paréntesis.} \\ &= 4 + 7\boxed{(3)^2} && \textit{Exponente.} \\ &= 4 + \boxed{7 \cdot 9} && \textit{Multiplicar.} \\ &= 4 + 63 \\ &= 67 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 81

EJEMPLO 7 Evaluar $-8 - 81 \div 9 \cdot 2^2 + 7$.

Solución

$$\begin{aligned} & -8 - 81 \div 9 \cdot \boxed{2^2} + 7 && \textit{Exponente.} \\ &= -8 - \boxed{81 \div 9} \cdot 4 + 7 && \textit{Multiplicar y dividir, de izquierda a derecha.} \\ &= -8 - \boxed{9 \cdot 4} + 7 && \textit{Multiplicar.} \\ &= \boxed{-8 - 36} + 7 && \textit{Sumar y restar, de izquierda a derecha.} \\ &= -44 + 7 \\ &= -37 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Evaluar **a)** $-4^2 + 6 \div 3$ **b)** $(-4)^2 + 6 \div 3$

Solución

a)

$$\begin{aligned} & -\boxed{4^2} + 6 \div 3 && \textit{Exponente.} \\ &= -16 + \boxed{6 \div 3} && \textit{Dividir.} \\ &= -16 + 2 \\ &= -14 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \boxed{(-4)^2} + 6 \div 3 && \textit{Exponente.} \\ &= 16 + \boxed{6 \div 3} && \textit{Dividir.} \\ &= 16 + 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Evaluar $\frac{3}{8} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{12}$.

Solución Primero se ejecuta la multiplicación.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8} - \boxed{\left(\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5} \cdot \frac{1}{\underset{6}{\cancel{12}}}\right)} && \textit{Multiplicar.} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{30} && \textit{Restar.} \\ &= \frac{45}{120} - \frac{4}{120} \\ &= \frac{41}{120} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 91

EJEMPLO 10 Escriba los siguientes enunciados como expresiones matemáticas con el uso de paréntesis y corchetes, y después evalúelos: restar 3 de 15, dividir esta diferencia entre 2 y multiplicar dicho cociente por 4.

Solución

$15 - 3$	*Restar 3 de 15.*
$(15 - 3) \div 2$	*Dividir entre 2.*
$4[(15 - 3) \div 2]$	*Multiplicar el cociente por 4.*

Ahora se evalúa.

$$\begin{aligned} &4[(15 - 3) \div 2] \\ &= 4[12 \div 2] \\ &= 4(6) \\ &= 24 \end{aligned}$$

Como se vio en el ejemplo 10, en ocasiones se emplean corchetes en lugar de paréntesis para ayudar a evitar que haya confusión. Si sólo se emplearan paréntesis, la expresión precedente aparecería como $4((15 - 3) \div 2)$.

Uso de la calculadora

Uso de paréntesis

En la calculadora, al evaluar una expresión en la que el orden de las operaciones ha de cambiar, será necesario usar paréntesis. En caso de que no esté seguro sin son o no necesarios, úselos, no afectará en nada. Considere la expresión $\frac{8}{4-2}$. Como queremos dividir 8 entre la diferencia de $4 - 2$, necesitaremos paréntesis.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$\dfrac{8}{4-2}$	8 $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 4 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$*	4

¿Qué se obtendría si se evaluara 8 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$ en una calculadora científica? ¿Por qué se obtuvo dicho resultado?

Para evaluar $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ en una calculadora científica, se presionan las siguientes teclas.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$	2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$**	.16
	o bien $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{x^2}$	.16

¿Qué resultaría si se evaluara 2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{x^2}$ en una calculadora científica? ¿Por qué?

* Si se usa una calculadora graficadora, se reemplaza $\boxed{=}$ con $\boxed{\text{ENTER}}$. Todo lo demás permanece sin cambio.

** En una calculadora graficadora se sustituye $\boxed{=}$ con $\boxed{\text{ENTER}}$ y se oprime $\boxed{\text{ENTER}}$ después de $\boxed{x^2}$.

6 Evaluar expresiones que contengan variables

Ahora se evaluarán algunas expresiones para valores dados de las variables.

EJEMPLO 11 Evalúe $5x - 4$, para $x = 3$.

Solución En la expresión se sustituye 3 en lugar de x.

$$5x - 4 = 5(3) - 4 = 15 - 4 = 11$$

EJEMPLO 12 Evalúe **a)** x^2 y **b)** $-x^2$ para $x = 3$.

Solución Se sustituye 3 en lugar de x.

a) $x^2 = 3^2 = 3(3) = 9$

b) $-x^2 = -3^2 = -(3)(3) = -9$

EJEMPLO 13 Evalúe **a)** y^2 y **b)** $-y^2$ para $y = -4$.

Solución Se sustituye -4 en lugar de y.

a) $y^2 = (-4)^2 = (-4)(-4) = 16$

b) $-y^2 = -(-4)^2 = -(-4)(-4) = -16$

Observe que $-x^2$ siempre será un número negativo para cualquier valor de x distinto de cero, y que $(-x)^2$ siempre será positivo para cualquier valor de x diferente de cero. ¿Es capaz de explicar por qué? Consulte el ejercicio 6 en la página 80.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

La expresión $-x^2$ significa $-(x^2)$. Cuando se pide evaluar $-x^2$ para cualquier número real como valor de x, muchos estudiantes intentan calcular $-x^2$ como $(-x)^2$. Por ejemplo, para evaluar $-x^2$ cuando $x = 5$,

CORRECTO	INCORRECTO
$-5^2 = -(5^2) = -(5)(5)$ $= -25$	~~$-5^2 = (-5)(-5)$ $= 25$~~

EJEMPLO 14 Evalúe $(4x + 1) + 2x^2$ cuando $x = \frac{1}{4}$.

Solución Se sustituye $\frac{1}{4}$ en lugar de cada x que haya en la expresión; después se evalúa en el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned}
(4x + 1) + 2x^2 &= \left[4\left(\frac{1}{4}\right) + 1\right] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 && \textit{Sustituir.}\\
&= [1 + 1] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 && \textit{Multiplicar.}\\
&= 2 + 2\left(\frac{1}{16}\right) && \textit{Sumar, exponente.}\\
&= 2 + \frac{1}{8} && \textit{Multiplicar.}\\
&= 2\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 15 Evaluar $-y^2 + 3(x + 2) - 5$ cuando $x = -3$ y $y = -2$.

Solución Se sustituye -3 en lugar de cada x y -2 en cada y; después se evalúa en el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned}
-y^2 + 3(x + 2) - 5 &= -(-2)^2 + 3(-3 + 2) - 5 && \textit{Sustituir.}\\
&= -(-2)^2 + 3(-1) - 5 && \textit{Paréntesis.}\\
&= -(4) + 3(-1) - 5 && \textit{Exponente.}\\
&= -4 - 3 - 5 && \textit{Multiplicar.}\\
&= -7 - 5 && \textit{Sustraer, de izquierda a derecha.}\\
&= -12
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 131

Uso de la calculadora

Evaluación de expresiones en una calculadora científica

Más adelante será necesario evaluar una expresión como $3x^2 - 2x + 5$ para varios valores de x. A continuación se muestra cómo evaluar dichas expresiones.

EVALUAR	TECLAS
a) $3x^2 - 2x + 5$, para $x = 4$	
$3(4)^2 - 2(4) + 5$	$3 \boxed{\times} 4 \boxed{x^2} \boxed{-} 2 \boxed{\times} 4 \boxed{+} 5 \boxed{=} 45$
b) $3x^2 - 2x + 5$, para $x = -6$	
$3(-6)^2 - 2(-6) + 5$	$3 \boxed{\times} 6 \boxed{+/-} \boxed{x^2} \boxed{-} 2 \boxed{\times} 6 \boxed{+/-} \boxed{+} 5 \boxed{=} 125$
c) $-x^2 - 3x - 5$, para $x = -2$	
$-(-2)^2 - 3(-2) - 5$	$1 \boxed{+/-} \boxed{\times} 2 \boxed{+/-} \boxed{x^2} \boxed{-} 3 \boxed{\times} 2 \boxed{+/-} \boxed{-} 5 \boxed{=} -3$

En el inciso **c)** hay que recordar que $-x^2 = -1x^2$.

Uso de la calculadora graficadora

Evaluación de expresiones en una calculadora graficadora

Todas las calculadoras graficadoras tienen un procedimiento para evaluar expresiones. Para utilizarlo, por lo general se necesita introducir el valor por usar para la variable y la expresión que ha de evaluarse. Después de oprimir la tecla $\boxed{\text{ENTER}}$, la calculadora graficadora mostrará la respuesta. El procedimiento varía de una calculadora a otra. A continuación se muestra la forma de evaluar una expresión en el modelo TI-83 Plus. En dicha calculadora, se emplea la tecla $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ para almacenar un valor. Los valores y expresiones almacenados se separan por medio de una coma, que se obtiene al oprimir $\boxed{\text{ALPHA}}$ seguida de $\boxed{\cdot}$.

EVALUAR	TECLAS EN LA TI-83 PLUS
$3x^2 - 2x + 5$ para $x = -6$	$\boxed{(-)}\ 6\ \boxed{\text{STO}\blacktriangleright}\ \boxed{\text{X,T},\ \theta, n}^{*}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{\cdot}\ 3\ \boxed{x}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ 2\ \boxed{x}\ \boxed{+}\ 5\ \boxed{\text{ENTER}}$
En la pantalla aparece:	$-6 \quad \rightarrow \quad x \quad : \quad 3 \quad x^2 \quad - \quad 2 \quad x \quad + \quad 5 \qquad 125$

Observe que para obtener una x^2 en la pantalla, se oprime la tecla $\boxed{\text{X,T},\ \theta, n}$ para seleccionar la variable x, y después se oprime la tecla $\boxed{x^2}$, que se usa para elevar al cuadrado la variable o número seleccionado.

Una característica útil de las calculadoras graficadoras es que para evaluar una expresión para valores diferentes de la variable, no es necesario introducir nuevamente la expresión en cada ocasión. Por ejemplo, en la TI-83 Plus, si se oprime $\boxed{2^{\text{nd}}}$ seguida de $\boxed{\text{ENTER}}$, se muestra nuevamente la expresión. Después sólo se regresa y se cambia el valor almacenado de la x por el nuevo valor y se oprime $\boxed{\text{ENTER}}$ para evaluar la expresión con el nuevo valor de la variable.

Cada marca de calculadoras utiliza teclas y procedimientos diferentes. Aquí sólo se hizo una revisión rápida. Por favor, lea el manual que viene con la calculadora graficadora para que obtenga una explicación completa de cómo evaluar expresiones.

* Esta tecla se utiliza para generar cualesquiera de dichas letras (θ es una letra griega). De aquí en adelante, al mostrar las teclas que se oprimen para generar una x sólo se mostrará $\boxed{x}$ en lugar de $\boxed{\text{X,T},\ \theta, n}$.

Avance de la lección

En este capítulo estudiaremos los exponentes y polinomios. En las secciones 4.1 y 4.2 analizaremos las reglas de los exponentes. En la sección 4.3, al estudiar la notación científica, emplearemos dichas reglas para resolver problemas de la vida real que involucran números muy grandes o muy pequeños. El conocimiento de la notación científica también le ayudará en sus cursos de ciencias y otros.

En las secciones 4.4 a 4.6, explicamos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios. Para tener éxito con ese material, debe entender las reglas de los exponentes que presentamos en las primeras dos secciones del capítulo. *Para comprender la factorización, que se expone en el capítulo 5, necesitamos entender los polinomios, en especial su multiplicación.* Como veremos, factorizar polinomios es lo inverso de multiplicarlos. En todo el libro trabajamos con polinomios.

4.1 EXPONENTES

1. Repasar los conceptos básicos de los exponentes.
2. Aprender las reglas de los exponentes.
3. Simplificar una expresión antes de utilizar la regla de la potencia expandida.

1 Repasar los conceptos básicos de los exponentes

Para utilizar los polinomios necesitamos ampliar nuestro conocimiento de los exponentes que presentamos en la sección 1.9 . Revisemos los conceptos fundamentales en la expresión x^n, denominamos **base** a la x, y a la n, **exponente**. x^n se lee "x elevada a la n-ésima potencia".

$$x^2 = \underbrace{x \cdot x}_{\text{2 factores de } x}$$

$$x^4 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{4 factores de } x}$$

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{m \text{ factores de } x}$$

EJEMPLO 1 Escribir *xxxxyyy* utilizando exponentes.

Solución

$$\underbrace{x\,x\,x\,x}_{\substack{\text{4 factores}\\ \text{de } x}}\quad \underbrace{y\,y\,y}_{\substack{\text{3 factores}\\ \text{de } y}} = x^4y^3$$

Recuerde que cuando un término contiene una variable sin coeficiente numérico, suponemos que éste es igual a 1. Por ejemplo $x = 1x$ y $x^2y = 1x^2y$.

También recuerde que cuando una variable o un valor numérico no tienen exponente, suponemos que dicho exponente es 1. Por ejemplo, $x = x^1$, $xy = x^1y^1$, $x^2y = x^2y^1$ y $2xy^2 = 2^1x^1y^2$.

2 Aprender las reglas de los exponentes

Ahora aprenderemos las reglas de los exponentes.

EJEMPLO 2 Multiplicar $x^4 \cdot x^3$.

Solución

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{x^3} = x^7$$

En el ejemplo 2 mostramos que al multiplicar expresiones que tienen la misma base, ésta se conserva y *sumamos* los exponentes. Veamos la **regla del producto para los exponentes.**

Regla del producto para los exponentes

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

En el ejemplo 2, demostramos que $x^4 \cdot x^3 = x^7$. Este problema también hubiera podido resolverse mediante la regla del producto: $x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$.

EJEMPLO 3 Multiplique cada expresión usando la regla del producto.

a) $3^2 \cdot 3$ **b)** $2^4 \cdot 2^2$ **c)** $x \cdot x^4$ **d)** $x^3 \cdot x^6$ **e)** $y^4 \cdot y^7$

Solución

a) $3^2 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3^1 = 3^{2+1} = 3^3$ o 27 **b)** $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$ o 64

c) $x \cdot x^4 = x^1 \cdot x^4 = x^{1+4} = x^5$ **d)** $x^3 \cdot x^6 = x^{3+6} = x^9$

e) $y^4 \cdot y^7 = y^{4+7} = y^{11}$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 17

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Observe que en el ejemplo 3**a)** tenemos que $3^2 \cdot 3^1$ es igual a 3^3 y no 9^3. Al multiplicar potencias de la misma base, *no multiplicamos las bases*.

CORRECTO	INCORRECTO
$3^2 \cdot 3^1 = 3^3$	$\cancel{3^2 \cdot 3^1 = 9^3}$

El ejemplo 4 le ayudará a comprender la **regla del cociente para exponentes.**

EJEMPLO 4 Dividir $x^5 \div x^3$.

Solución

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1x^2}{1} = x^2$$

Al dividir expresiones con la misma base, conservamos ésta y restamos el exponente del denominador del exponente del numerador.

Regla del cociente para exponentes

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \qquad x \neq 0$$

En el ejemplo 4 demostramos que $x^5/x^3 = x^2$. Este problema también hubiera podido resolverse mediante la regla del cociente: $x^5/x^3 = x^{5-3} = x^2$.

EJEMPLO 5 Dividir cada expresión de acuerdo con la regla del cociente.

a) $\frac{3^5}{3^2}$ **b)** $\frac{6^4}{6}$ **c)** $\frac{x^{12}}{x^5}$ **d)** $\frac{y^{10}}{y^8}$ **e)** $\frac{z^8}{z}$

Solución **a)** $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$ o 27 **b)** $\frac{6^4}{6} = \frac{6^4}{6^1} = 6^{4-1} = 6^3$ o 216

c) $\frac{x^{12}}{x^5} = x^{12-5} = x^7$ **d)** $\frac{y^{10}}{y^8} = y^{10-8} = y^2$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 23

e) $\frac{z^8}{z} = \frac{z^8}{z^1} = z^{8-1} = z^7$

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Observe que en el ejemplo 5**a)** tenemos que $3^5/3^2$ es 3^3 y no 1^3. Al dividir potencias con la misma base, *no se dividen las bases*.

CORRECTO	INCORRECTO
$\frac{3^3}{3^1} = 3^2$ o 9	$\cancel{\frac{3^3}{3^1} = 1^2}$

La respuesta al ejemplo 5**c)**, x^{12}/x^5 es x^7. Obtuvimos esta respuesta mediante la regla del cociente. También puede resolverse dividiendo los factores comunes del numerador entre los del denominador, así:

$$\frac{x^{12}}{x^5} = \frac{(\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{(\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x})} = x^7$$

Dividimos entre el producto de las cinco x, que es x^5. Indicamos este proceso en forma abreviada del siguiente modo.

$$\frac{x^{12}}{x^5} = \frac{\cancel{x^5} \cdot x^7}{\cancel{x^5}} = x^7$$

En esta sección, para simplificar una expresión cuando el numerador y el denominador tienen la misma base y el exponente del denominador es mayor que el del numerador, dividimos los factores comunes. Por ejemplo, simplificamos x^5/x^{12} con la división del factor común, x^5, como sigue.

$$\frac{x^5}{x^{12}} = \frac{\cancel{x^5}}{\cancel{x^5} \cdot x^7} = \frac{1}{x^7}$$

Ahora simplificaremos algunas expresiones dividiendo los factores comunes.

EJEMPLO 6 Simplificar dividiendo un factor común tanto del numerador como del denominador.

a) $\frac{x^9}{x^{12}}$ **b)** $\frac{y^4}{y^9}$

Solución **a)** Como el numerador es x^9, el denominador se escribe como factor de x^9. Como $x^9 \cdot x^3 = x^{12}$, se rescribe x^{12} como $x^9 \cdot x^3$.

$$\frac{x^9}{x^{12}} = \frac{\cancel{x^9}}{\cancel{x^9} \cdot x^3} = \frac{1}{x^3}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 27

b) $\frac{y^4}{y^9} = \frac{\cancel{y^4}}{\cancel{y^4} \cdot y^5} = \frac{1}{y^5}$

En la siguiente sección mostraremos otra forma de evaluar expresiones como $\dfrac{x^9}{x^{12}}$ mediante la regla del exponente negativo.

El ejemplo 7 nos conduce a otra regla, la **regla del exponente cero**.

EJEMPLO 7 Dividir $\dfrac{x^3}{x^3}$.

Solución Según la regla del cociente,

$$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0$$

Sin embargo,

$$\frac{x^3}{x^3} = \frac{1x^3}{1x^3} = \frac{1 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{1 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $x^3/x^3 = x^0$ y $x^3/x^3 = 1$, entonces x^0 debe ser igual a 1. ✷

Regla del exponente cero

$$x^0 = 1, \qquad x \neq 0$$

Según la regla del exponente cero, cualquier número real, excepto 0, elevado a la potencia cero es igual a 1. Obsérvese que 0^0 no está definida.

EJEMPLO 8 Simplifique cada expresión. Suponga que $x \neq 0$.

a) 3^0 **b)** x^0 **c)** $3x^0$ **d)** $(3x)^0$ **e)** $4x^2y^3z^0$

Solución

a) $3^0 = 1$

b) $x^0 = 1$

c) $3x^0 = 3(x^0)$
$= 3 \cdot 1 = 3$

Recuerde que el exponente afecta sólo al símbolo que lo precede inmediatamente, a menos que emplee paréntesis.

d) $(3x)^0 = 1$

e) $4x^2y^3z^0 = 4x^2y^3 \cdot 1 = 4x^2y^3$ ✷

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Una expresión elevada a la potencia cero no es igual a 0; es igual a 1.

CORRECTO	INCORRECTO
$x^0 = 1$	$\cancel{x^0 = 0}$
$5^0 = 1$	$\cancel{5^0 = 0}$

Explicaremos la **regla de la potencia** con ayuda del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Simplifique $(x^3)^2$.

Solución

$$(x^3)^2 = \underbrace{x^3 \cdot x^3}_{\text{2 factores de } x^3} = x^{3+3} = x^6$$

✷

Regla de la potencia para los exponentes

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

La regla de la potencia indica que cuando una expresión que ya está elevada a una potencia es elevada a otra potencia, se conserva la base y *se multiplican* los exponentes. El ejemplo 9 también hubiera podido simplificarse con el empleo de la regla de la potencia: $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$.

EJEMPLO 10 Simplificar. **a)** $(x^3)^5$ **b)** $(3^4)^2$ **c)** $(y^5)^7$

Solución **a)** $(x^3)^5 = x^{3 \cdot 5} = x^{15}$ **b)** $(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$ **c)** $(y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$ ✺

SUGERENCIA

Con frecuencia los estudiantes confunden las reglas del producto y de la potencia. Observe con cuidado la diferencia.

Regla del producto	Regla de la potencia
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$	$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 51

El ejemplo 11 será útil para explicar la **regla de la potencia expandida**. Como el nombre sugiere, ésta es una expansión de la regla de la potencia.

EJEMPLO 11 Simplificar $\left(\dfrac{ax}{by}\right)^4$.

Solución

$$\left(\frac{ax}{by}\right)^4 = \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by}$$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{a^4 \cdot x^4}{b^4 \cdot y^4} = \frac{a^4x^4}{b^4y^4}$$ ✺

Regla de la potencia expandida para exponentes

$$\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \qquad b \neq 0,\ y \neq 0$$

La regla de la potencia expandida indica que elevamos cada factor dentro del paréntesis a la potencia indicada fuera de éste cuando simplificamos la expresión.

EJEMPLO 12 Simplifique cada expresión.

a) $(4x)^2$ **b)** $(-x)^3$ **c)** $(5xy)^3$ **d)** $\left(\dfrac{-3y}{2z}\right)^2$

Solución **a)** $(4x)^2 = 4^2x^2 = 16x^2$ **b)** $(-x)^3 = (-1x)^3 = (-1)^3x^3 = -1x^3 = -x^3$

c) $(5xy)^3 = 5^3x^3y^3 = 125x^3y^3$ **d)** $\left(\dfrac{-3y}{2z}\right)^2 = \dfrac{(-3)^2y^2}{2^2z^2} = \dfrac{9y^2}{4z^2}$ ✺

3 Simplificar una expresión antes de utilizar la regla de la potencia expandida

Siempre que tengamos una expresión elevada a una potencia, es útil simplificar lo que esté dentro del paréntesis antes de emplear la regla de la potencia expandida. Ilustramos este procedimiento en los ejemplos 13 y 14.

EJEMPLO 13 Simplificar $\left(\dfrac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3$.

Solución En primer lugar simplificamos la expresión dentro del paréntesis, dividiendo los factores comunes.

$$\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3 = \left(\frac{9}{3}\cdot\frac{x^3}{x}\cdot\frac{y^2}{y^2}\right)^3 = (3x^2)^3$$

Ahora utilizamos la regla de la potencia expandida para terminar.

$$(3x^2)^3 = 3^3(x^2)^3 = 27x^6$$

Por tanto, $\left(\dfrac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3 = 27x^6$.

SUGERENCIA

CONSEJO PARA ESTUDIAR

Sea muy cuidadoso al escribir los exponentes. Por lo general son más pequeños que el resto del texto; tómese su tiempo, escríbalos con claridad y colóquelos en forma apropiada. Si no los escribimos con claridad es muy fácil confundir algunos de ellos, como 2 con 3, 1 con 4, o 0 con 6. Si escribimos o llevamos un exponente de un paso a otro de manera incorrecta, obtendremos una respuesta equivocada.

EJEMPLO 14 Simplificar $\left(\dfrac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4$.

Solución Comenzamos por simplificar la expresión dentro del paréntesis.

$$\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4 = \left(\frac{25}{5}\cdot\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac{y^3}{y^7}\right)^4 = \left(\frac{5x^2}{y^4}\right)^4$$

Ahora utilizamos la regla de la potencia expandida para terminar.

$$\left(\frac{5x^2}{y^4}\right)^4 = \frac{5^4(x^2)^4}{(y^4)^4} = \frac{625x^8}{y^{16}}$$

Por tanto, $\left(\dfrac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4 = \dfrac{625x^8}{y^{16}}$.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 91

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes comenten errores al simplificar expresiones que contienen exponentes. Uno de los más comunes es el siguiente. Estúdielo con cuidado para asegurarse de no cometerlo.

CORRECTO	INCORRECTO
$\dfrac{4}{2x} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}x} = \dfrac{2}{x}$	$\dfrac{4}{x+2} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}}{x+\underset{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{2}{x+1}$
$\dfrac{x}{xy} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}y} = \dfrac{1}{y}$	$\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}+y} = \dfrac{1}{1+y}$
$\dfrac{5x^3y^2}{y^2} = \dfrac{5x^3\overset{1}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{y^2}}} = 5x^3$	$\dfrac{5x^3+y^2}{y^2} = \dfrac{5x^3+\overset{1}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{y^2}}} = 5x^3+1$

(continúa en la página siguiente)

Las simplificaciones del lado derecho no son correctas porque sólo los *factores* comunes se pueden dividir (recuerde que los factores se multiplican entre sí). En el primer denominador de la derecha, $x + 2$, la x y el 2 son términos, no factores, puesto que se están sumando En forma similar, en el segundo denominador, $x + y$, la x y la y son términos y no factores, ya que se están sumando. Asimismo, en el numerador $5x^3 + y^2$, el $5x^3$ y la y^2 son términos, no factores. No es posible dividir ningún factor común en las fracciones del lado derecho.

EJEMPLO 15 Simplificar $(3y^3z^2)^4(2y^4z)$

Solución En primer lugar simplificamos $(3y^3z^2)^4$ por medio de la regla de la potencia expandida.

$$(3y^3z^2)^4 = 3^4y^{3\cdot4}z^{2\cdot4} = 81y^{12}z^8$$

Ahora empleamos la regla del producto para simplificar aún más.

$$\begin{aligned}(3y^3z^2)^4(2y^4z) &= (81y^{12}z^8)(2y^4z^1)\\ &= 81\cdot2\cdot y^{12}\cdot y^4\cdot z^8\cdot z^1\\ &= 162y^{12+4}z^{8+1}\\ &= 162y^{16}z^9\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 125

Por tanto, $(3y^3z^2)^4(2y^4z) = 162y^{16}z^9$.

Resumen de las reglas de los exponentes que presentamos en esta sección

1. $x^m\cdot x^n = x^{m+n}$	**Regla del producto**
2. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$	**Regla del cociente**
3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$	**Regla del exponente cero**
4. $(x^m)^n = x^{m\cdot n}$	**Regla de la potencia**
5. $\left(\dfrac{ax}{by}\right)^m = \dfrac{a^mx^m}{b^my^m}, \quad b \neq 0, \quad y \neq 0$	**Regla de la potencia expandida**

Conjunto de ejercicios 4.1

Ejercicios conceptuales

1. En la expresión exponencial c^r, ¿cómo se denomina a la c?, ¿cuál es el nombre de la r?

2. a) Escriba la regla del producto para exponentes.

b) Explique con sus propias palabras la regla del producto.

3. a) Escriba la regla del cociente para exponentes.

b) Con sus propias palabras, explique la regla del cociente.

4. a) Escriba la regla del exponente cero.

b) Con sus propias palabras, explique la regla del exponente cero.

5. a) Escriba la regla de la potencia para exponentes.

b) Explique con sus propias palabras la regla de la potencia.

6. a) Escriba la regla de la potencia expandida para exponentes.

b) Con sus propias palabras, explique la regla de la potencia expandida.

7. Para qué valor de x es $x^0 \neq 1$?

8. Explique la diferencia entre la regla del producto y la de la potencia. Proporcione un ejemplo de cada uno.

4.2 EXPONENTES NEGATIVOS

1 Entender la regla del exponente negativo.
2 Simplificar expresiones que contienen exponentes negativos.

1 Entender la regla del exponente negativo

Una regla adicional que involucra a los exponentes, es la del exponente negativo. Necesitamos entender los exponentes negativos para tener éxito con la notación científica que estudiaremos en la siguiente sección.

Desarrollaremos la regla del exponente negativo por medio de la regla del cociente, que ilustramos en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Simplifique la expresión x^3/x^5, **a)** con la regla del cociente, y b) con la división de los factores comunes.

Solución **a)** Con la regla del cociente,

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$$

b) Con la división de los factores comunes,

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x} = \frac{1}{x^2}$$

En el ejemplo 1, vemos que x^3/x^5 es igual tanto a x^{-2} como a $1/x^2$. Por tanto, x^{-2} debe ser igual a $1/x^2$; es decir, $x^{-2} = 1/x^2$. Éste es un ejemplo de la **regla del exponente negativo**.

Regla del exponente negativo

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \qquad x \neq 0$$

Cuando elevamos una variable o número a un exponente negativo, podemos reescribir como 1 dividido entre la variable o número elevados al mismo exponente, pero con signo positivo.

Ejemplos

$$x^{-6} = \frac{1}{x^6} \qquad 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$y^{-7} = \frac{1}{y^7} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes creen que un exponente negativo hace automáticamente que el valor de la expresión sea negativo. Eso no es verdad.

EXPRESIÓN	CORRECTO	INCORRECTO	TAMBIÉN INCORRECTO
3^{-2}	$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$\cancel{-3^2}$	$\cancel{-\frac{1}{3^2}}$
x^{-3}	$\frac{1}{x^3}$	$\cancel{-x^3}$	$\cancel{-\frac{1}{x^3}}$

Para ayudarlo apreciar que la regla del exponente negativo tiene sentido, considere la siguiente secuencia de expresiones exponenciales y sus valores correspondientes.

$$2^3 = 8,\quad 2^2 = 4,\quad 2^1 = 2,\quad 2^0 = 1,\quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} \text{ o bien } \frac{1}{2},\quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \text{ o bien } \frac{1}{4},\quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \text{ o bien } \frac{1}{8}$$

Observe que cada vez que el exponente disminuye una unidad, el valor de la expresión se reduce a la mitad. Por ejemplo, si pasamos de 2^3 a 2^2, el valor de la expresión disminuye de 8 a 4. Si continuamos con la disminución de los exponentes más allá de $2^0 = 1$, entonces el exponente que sigue en el patrón es -1. Y obtenemos la mitad de 1 que es $\frac{1}{2}$. Este patrón ilustra que $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$.

2 Simplificar expresiones que contienen exponentes negativos

Por lo general, cuando simplifique una expresión exponencial, **la respuesta final no debe contener exponentes negativos**. Podemos simplificar expresiones exponenciales utilizando la regla del exponente negativo y las reglas presentadas en la sección anterior. Los siguientes ejemplos indican la manera de simplificar expresiones exponenciales que contienen exponentes negativos.

EJEMPLO 2 Utilice la regla del exponente negativo para escribir cada expresión con un exponente positivo. Simplifique las expresiones siempre que sea posible.

a) x^{-3} **b)** y^{-4} **c)** 3^{-2} **d)** 5^{-1} **e)** -5^{-3} **f)** $(-5)^{-3}$

Solución

a) $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ **b)** $y^{-4} = \dfrac{1}{y^4}$

c) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ **d)** $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 11

e) $-5^{-3} = -\dfrac{1}{5^3} = -\dfrac{1}{125}$ **f)** $(-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = \dfrac{1}{-125} = -\dfrac{1}{125}$

EJEMPLO 3 Utilice la regla del exponente negativo para escribir cada expresión con un exponente positivo.

a) $\dfrac{1}{x^{-2}}$ **b)** $\dfrac{1}{4^{-1}}$

Solución En primer lugar, utilizamos la regla del exponente negativo en el denominador. Después, termine la operación.

a) $\dfrac{1}{x^{-2}} = \dfrac{1}{1/x^2} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{x^2}{1} = x^2$ **b)** $\dfrac{1}{4^{-1}} = \dfrac{1}{1/4} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{4}{1} = 4$

SUGERENCIA

De los ejemplos 2 y 3, observamos que cuando un factor pasa del denominador al numerador o del numerador al denominador, el signo del *exponente* cambia.

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4} \qquad \frac{1}{x^{-4}} = x^4$$

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5} \qquad \frac{1}{3^{-5}} = 3^5$$

Ahora resolveremos ejemplos adicionales en los que combinamos dos o más de las reglas que hemos presentado hasta este momento.

EJEMPLO 4 Simplifique las expresiones. **a)** $(z^{-5})^4$ **b)** $(4^2)^{-3}$

Solución

a) $(z^{-5})^4 = z^{(-5)(4)}$ *Por la regla de la potencia.*

$= z^{-20}$

$= \dfrac{1}{z^{20}}$ *Por la regla del exponente negativo.*

b) $(4^2)^{-3} = 4^{(2)(-3)}$ *Por la regla de la potencia.*

$= 4^{-6}$

$= \dfrac{1}{4^6}$ *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 25

EJEMPLO 5 Simplifique las expresiones. **a)** $x^3 \cdot x^{-5}$ **b)** $3^{-4} \cdot 3^{-7}$

Solución

a) $x^3 \cdot x^{-5} = x^{3+(-5)}$ *Por la regla del producto.*

$= x^{-2}$

$= \dfrac{1}{x^2}$ *Por la regla del exponente negativo.*

b) $3^{-4} \cdot 3^{-7} = 3^{-4+(-7)}$ *Por la regla del producto.*

$= 3^{-11}$

$= \dfrac{1}{3^{11}}$ *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 51

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Cuánto vale la suma de $3^2 + 3^{-2}$? Estudie con cuidado la solución correcta.

CORRECTO	INCORRECTO
$3^2 + 3^{-2} = 9 + \dfrac{1}{9}$	$\cancel{3^2 + 3^{-2} = 0}$
$= 9\dfrac{1}{9}$	

Observe que $3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$.

EJEMPLO 6 Simplifique las expresiones. **a)** $\dfrac{z^{-6}}{z^{12}}$ **b)** $\dfrac{5^{-7}}{5^{-4}}$

Solución

a) $\dfrac{z^{-6}}{z^{12}} = z^{-6-12}$ *Por la regla del cociente.*

$= z^{-18}$

$= \dfrac{1}{z^{18}}$ *Por la regla del exponente negativo.*

b) $\dfrac{5^{-7}}{5^{-4}} = 5^{-7-(-4)}$ *Por la regla del cociente.*

$= 5^{-7+4}$

$= 5^{-3}$

$= \dfrac{1}{5^3}$ o bien $\dfrac{1}{125}$ *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 81

Debe leer cuidadosamente la siguiente Sugerencia

SUGERENCIA

Consideremos un problema de división en el que una variable tenga un exponente negativo ya sea en el numerador o en el denominador, como en el ejemplo 6**a)**. Otra manera de simplificarla sería pasar la variable con el exponente negativo del numerador al denominador, o viceversa, y cambiamos el signo de ese exponente. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-4}}{x^5} = \frac{1}{x^5 \cdot x^4} = \frac{1}{x^{5+4}} = \frac{1}{x^9}$$

$$\frac{y^3}{y^{-7}} = y^3 \cdot y^7 = y^{3+7} = y^{10}$$

Ahora consideremos un problema de división en el que un número o variable tenga exponente negativo en ambos, tanto en el numerador o como en el denominador, como en el ejemplo 6**b)**. Otra manera de simplificar una expresión como ésa sería pasar la variable con el exponente negativo mayor del numerador al denominador, o del denominador al numerador, y cambiamos de negativo a positivo el signo del exponente. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-8}}{x^{-3}} = \frac{1}{x^8 \cdot x^{-3}} = \frac{1}{x^{8-3}} = \frac{1}{x^5} \qquad \text{Observe que } -8 < -3.$$

$$\frac{y^{-4}}{y^{-7}} = y^7 \cdot y^{-4} = y^{7-4} = y^3 \qquad \text{Note que } -7 < -4.$$

EJEMPLO 7 Simplifique las expresiones. **a)** $7x^4(6x^{-9})$ **b)** $\dfrac{16r^3s^{-3}}{8rs^2}$ **c)** $\dfrac{2x^2y^5}{8x^7y^{-3}}$

Solución

a) $7x^4(6x^{-9}) = 7 \cdot 6 \cdot x^4 \cdot x^{-9} = 42x^{-5} = \dfrac{42}{x^5}$

b) $$\frac{16r^3s^{-3}}{8rs^2} = \frac{16}{8} \cdot \frac{r^3}{r} \cdot \frac{s^{-3}}{s^2} = 2 \cdot r^2 \cdot \frac{1}{s^5} = \frac{2r^2}{s^5}$$

c) $$\frac{2x^2y^5}{8x^7y^{-3}} = \frac{2}{8} \cdot \frac{x^2}{x^7} \cdot \frac{y^5}{y^{-3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^5} \cdot y^8 = \frac{y^8}{4x^5}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 119

En el ejemplo 7**b)**, pasamos la variable con el exponente negativo, s^{-3}, del numerador al denominador. En el ejemplo 7**c)**, pasamos del denominador al numerador la variable con el exponente negativo, y^{-3}. En cada caso, al mover al factor variable cambiamos el signo del exponente de negativo a positivo.

EJEMPLO 8 Simplifique $(5x^{-3})^{-2}$.

Solución Empleando la regla de la potencia expandida.

$$(5x^{-3})^{-2} = 5^{-2}x^{(-3)(-2)} = 5^{-2}x^6 = \frac{1}{5^2}x^6 = \frac{x^6}{25}$$

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Puede explicar por qué es incorrecta la simplificación que se muestra en el lado derecho?

CORRECTO	INCORRECTO
$\dfrac{x^3y^{-2}}{w} = \dfrac{x^3}{wy^2}$	$\cancel{\dfrac{x^3+y^{-2}}{w} = \dfrac{x^3}{w+y^2}}$

La simplificación del lado derecho es incorrecta porque en el numerador $x^3 + y^{-2}$, la y^{-2} *no es un factor*, sino un término. Aprenderemos a simplificar expresiones como ésta cuando estudiemos fracciones complejas en la sección 6.5.

EJEMPLO 9 Simplificar $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

Solución De acuerdo con la regla de la potencia expandida, escribimos

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{\dfrac{1}{2^2}}{\dfrac{1}{3^2}} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{1} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Si examinamos los resultados del ejemplo 7 vemos que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Este ejemplo ilustra que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{m}$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Así, por ejemplo, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{5}$ y $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{-3} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^{3}$. Resumimos esta información como sigue:

Regla de una fracción elevada a un exponente negativo

Para una fracción de la forma $\dfrac{a}{b}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{m}$.

EJEMPLO 10 Simplificar **a)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$ **b)** $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-4}$

Solución Utilizamos la regla anterior para simplificar.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 95

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{3} = \dfrac{4^3}{3^3} = \dfrac{64}{27}$ **b)** $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\dfrac{y^3}{x^2}\right)^{4} = \dfrac{y^{3\cdot4}}{x^{2\cdot4}} = \dfrac{y^{12}}{x^8}$

EJEMPLO 11 Simplificar **a)** $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{z^4}\right)^{-5}$ **b)** $\left(\dfrac{2x^{-3}y^2z}{x^2}\right)^{2}$

Solución **a)** Resolveremos el inciso **a)** con dos métodos diferentes. En el primero, emplearemos la regla de la potencia expandida. En el segundo, utilizaremos la regla de una fracción elevada a un exponente negativo antes de utilizar la regla de la potencia expandida. Usted puede usar cualquier método.

Método 1

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2y^{-3}}{z^4}\right)^{-5} &= \frac{x^{2(-5)}y^{(-3)(-5)}}{z^{4(-5)}} && \textit{Regla del potencia expandida.}\\ &= \frac{x^{-10}y^{15}}{z^{-20}} && \textit{Multiplicar los exponentes.}\\ &= \frac{y^{15}z^{20}}{x^{10}} && \textit{Regla del exponente negativo.}\end{aligned}$$

Método 2

$$\left(\frac{x^2y^{-3}}{z^4}\right)^{-5} = \left(\frac{z^4}{x^2y^{-3}}\right)^5 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= \left(\frac{y^3z^4}{x^2}\right)^5 \qquad \text{Simplificar la expresión entre paréntesis.}$$

$$= \frac{y^{3\cdot 5}z^{4\cdot 5}}{x^{2\cdot 5}} \qquad \text{Regla de la potencia expandida.}$$

$$= \frac{y^{15}z^{20}}{x^{10}} \qquad \text{Multiplicar los exponentes.}$$

b) Primero simplificamos la expresión entre paréntesis, después elevamos al cuadrado los resultados. Para simplificar, observamos que $\frac{x^{-3}}{x^2}$ se convierte en $\frac{1}{x^5}$.

$$\left(\frac{2x^{-3}y^2z}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{2y^2z}{x^5}\right)^2 = \frac{2^2y^{2\cdot 2}z^{1\cdot 2}}{x^{5\cdot 2}} = \frac{4y^4z^2}{x^{10}}$$

Resumen de reglas de los exponentes

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	**regla del producto**
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$	**regla del cociente**
3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$	**regla del exponente cero**
4. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	**regla de las potencias**
5. $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^mx^m}{b^my^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$	**regla de la potencia expandida**
6. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$	**regla del exponente negativo**
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$	**regla de una fracción elevada a un exponente negativo**

Conjunto de ejercicios 4.2

Ejercicios conceptuales

1. Con sus propias palabras, describa la regla del exponente negativo.

2. ¿Está simplificada la expresión x^{-2}? Si no lo estuviera, simplifíquela.

3. ¿Está simplificada la expresión x^5y^{-3}? Si no lo estuviera, simplifíquela.

4. ¿La expresión a^6b^{-2} puede simplificarse a $1/a^6b^{-2}$? Si no fuera posible, ¿cuál sería la simplificación correcta? Explique su respuesta.

5. ¿La expresión $(y^4)^{-3}$ puede simplificarse a $1/y^7$? Si no es posible, ¿cuál es la simplificación correcta? Explique.

6. ¿Las siguientes expresiones están simplificadas? Si una expresión no lo estuviera, explique por qué y luego simplifíquela.

a) $\frac{5}{x^3}$ **b)** n^{-5}

c) $\frac{a^{-4}}{2}$ **d)** $\frac{x^{-4}}{x^4}$

7. a) Identifique los términos en el numerador de la expresión $\frac{x^5y^2}{z^3}$.

152. Para cualquier número real diferente de cero a, si $a^{-1} = x$, defina las siguientes expresiones en términos de x.

a) $-a^{-1}$ **b)** $\frac{1}{a^{-1}}$

153. Considere $(3^{-1} + 2^{-1})^0$. De acuerdo con la regla del exponente cero, se sabe que esto es igual a 1. Como grupo, determinen el error en el cálculo siguiente. Expliquen su respuesta.

$$\begin{aligned}(3^{-1} + 2^{-1})^0 &= (3^{-1})^0 + (2^{-1})^0 \\ &= 3^{-1(0)} + 2^{-1(0)} \\ &= 3^0 + 2^0 \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

Actividad en grupo

Como grupo, estudien y respondan el ejercicio 154.

154. Es frecuente que los problemas que involucran exponentes se resuelvan en más de una forma. Considere

$$\left(\frac{3x^2y^3}{x}\right)^{-2}$$

a) Miembro 1 del grupo: simplifique esta expresión, comenzando con lo que está entre paréntesis.

b) Miembro 2 del grupo: simplifique esta expresión, empleando antes que nada la regla de la potencia expandida

c) Miembro 3 del grupo: simplifique esta expresión, empleando en primer lugar de la regla del exponente negativo.

d) Comparen sus respuestas. Si no obtienen la misma, determinen por qué.

e) Como grupo, decidan con cuál método fue más fácil simplificar la expresión —**a), b)** o **c)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.6] **155.** ***Veleo*** Si un velero viaja 3 millas en 48 minutos, ¿cuánto viajará en 80 minutos (con todas las condiciones sin cambio)?

[3.1] **156.** ***Volumen*** Encuentre el volumen de un cilindro recto cuyo radio mide 5 pulgadas y su altura es de 12 pulgadas.

[3.3] **157.** ***Enteros*** El mayor de dos enteros es una unidad más que el triple del menor. Si la suma de los dos es 37, encuéntrelos.

158. ***Costo de un artículo*** El costo de un artículo una vez que se incrementa 20% es de $1.50. Encuentre el precio del artículo antes del incremento.

159. ***Enteros consecutivos*** Calcule dos enteros consecutivos cuya suma sea 75.

4.3 NOTACIÓN CIENTÍFICA

1. Convertir números a notación científica y viceversa.
2. Reconocer números en notación científica con coeficiente 1.
3. Hacer cálculos con notación científica.

1 Convertir números a notación científica y viceversa

Es frecuente ver, y a veces utilizar, números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, en enero de 2001, la población del mundo era cerca de 6,160,000,000 de personas. Tal vez se haya leído que el virus de la influenza mide 0.0000001 metros de diámetro. Debido a que es difícil trabajar con tantos ceros, expresamos tales números por medio de exponentes. Por ejemplo, el número 6,160,000,000 lo escribimos como 6.16×10^9, y el número 0.0000001 como 1.0×10^{-7}.

Los números como 6.16×10^9 y 1.0×10^{-7} están en una forma conocida como **notación científica**. Escribimos cada número en notación científica como un mayor o igual a 1 y menor que 10 ($1 \leq a < 10$), multiplicado por alguna potencia de 10. El exponente del 10 debe ser un entero.

Ejemplos de números en notación científica

$$1.2 \times 10^6$$
$$3.762 \times 10^3$$
$$8.07 \times 10^{-2}$$
$$1 \times 10^{-5}$$

A continuación cambiamos el número 68,400 a notación científica.

$$\begin{aligned} 68{,}400 &= 6.84 \times 10{,}000 \\ &= 6.84 \times 10^4 \qquad \text{Observe que } 10{,}000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4. \end{aligned}$$

Por tanto, $68{,}400 = 6.84 \times 10^4$. Para pasar de 68,400 a 6.84, el punto decimal se recorrió cuatro lugares a la izquierda. Observe que el exponente del 10, que es 4, es el mismo número de lugares que se recorre el punto decimal hacia la izquierda.

A continuación mostramos el procedimiento simplificado para escribir un número en notación científica.

Para escribir un número en notación científica

1. Recorrer el punto decimal del número original a la derecha del primer dígito diferente de cero. Esto dará un número mayor o igual a 1 y menor que 10.
2. Contar el número de lugares que recorrimos el punto decimal para obtener el número en el paso 1. Si el número original era 10 o mayor, consideramos la cuenta como positiva. Si el número original era menor que 1, consideramos la cuenta como negativa.
3. Multiplique el número que obtuvimos en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (exponente) que se obtuvo en el paso 2.

EJEMPLO 1 Escriba los números siguientes en notación científica.

a) 10,700 **b)** 0.000386 **c)** 972,000 **d)** 0.0083

Solución **a)** El número original es mayor que 10; por tanto, el exponente es positivo. Encontramos el punto decimal de 10,700 después del último cero.

$$\underbrace{10{,}700.}_{\text{Cuatro lugares}} = 1.07 \times 10^4$$

b) El número original es menor que 1; por tanto, el exponente es negativo.

$$\underbrace{0.000386}_{\text{Cuatro lugares}} = 3.86 \times 10^{-4}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 17

c) $\underbrace{972{,}000.}_{\text{5 lugares}} = 9.72 \times 10^5$ **d)** $\underbrace{0.0083}_{\text{3 lugares}} = 8.3 \times 10^{-3}$

Al escribir un número en notación científica, podemos dejar la respuesta con exponente negativo, como en los ejemplos 1**b)** y 1**d)**.

A continuación explicamos cómo escribir un número que esté en notación científica, como número sin exponentes o en forma decimal.

Para convertir un número de notación científica a forma decimal

1. Observar el exponente de la potencia de 10.
2. a) Si el exponente es positivo, el punto decimal del número (mayor o igual que 1 y menor que 10) se recorre a la derecha el mismo número de lugares que el exponente. Quizá sea necesario agregar ceros al número. Esto dará como resultado un número mayor o igual que 10.
   b) Si el exponente es 0, el punto decimal no se mueve. Se elimina el factor 10^0 porque es igual a 1. Esto dará como resultado un número mayor o igual a 1 pero menor que 10.
   c) Si el exponente es negativo, el punto decimal del número se mueve a la izquierda el mismo número de lugares que el exponente (sin contar el signo negativo). Tal vez sea necesario agregar ceros. Esto dará como resultado un número menor que 1.

EJEMPLO 2 Escriba cada número sin exponentes.

a) 2.9×10^4 **b)** 6.28×10^{-3} **c)** 7.95×10^8

Solución **a)** Recorremos el punto decimal cuatro lugares a la derecha.

$$2.9 \times \boxed{10^4} = 2.9 \times \boxed{10{,}000} = 29{,}000$$

b) Recorremos el punto decimal tres lugares hacia la izquierda.

$$6.28 \times 10^{-3} = 0.00628$$

c) Recorremos el punto decimal ocho lugares hacia la derecha.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 39

$$7.95 \times 10^8 = 795{,}000{,}000$$

2 Reconocer números en notación científica con coeficiente 1

Frecuentemente escuchamos términos como kilogramos, miligramos y gigabytes. Por ejemplo, un frasco de tabletas de aspirinas tal vez indica que cada pastilla contiene 325 miligramos de aspirina. El disco duro de su computadora tiene, quizá, 40 gigabytes de memoria. Los prefijos kilo, mili y giga, son algunos de los que empleamos en el *sistema métrico*. Éste se utiliza como el sistema principal de medición en todas las naciones occidentales, excepto en los Estados Unidos. Siempre los empleamos con algún tipo de unidad base. Éstas pueden ser, por ejemplo, el metro, m (unidad de longitud); gramo, g (unidad de masa); litro, ℓ (unidad de volumen); bits, b (unidad de memoria de una computadora); o hertzios, Hz (medida de frecuencia). Por ejemplo, un *milímetro* es $\frac{1}{1000}$ metros. Un *megagramo* es 1,000,000 gramos, y así sucesivamente. La siguiente tabla ilustra el significado de algunos prefijos.*

*Existen otros prefijos que no se mencionan en la tabla. Por ejemplo, centi es 10^{-2} o 0.01 por la unidad base.

Prefijo	Significado	Símbolo	Significado como número decimal
nano	10^{-9}	n	$\frac{1}{1,000,000,000}$ o 0.000000001
micro	10^{-6}	μ	$\frac{1}{1,000,000}$ o 0.000001
mili	10^{-3}	m	$\frac{1}{1000}$ o 0.001
unidad base*	10^{0}		1
kilo	10^{3}	k	1000
mega	10^{6}	M	1,000,000
giga	10^{9}	G	1,000,000,000

* La unidad base no es un prefijo. Se incluye este renglón para introducir 10^0 en la tabla.

En ocasiones veremos números escritos como potencias de 10, pero sin un coeficiente numérico, como en la tabla anterior. Si no se indica el coeficiente numérico, éste siempre es igual a 1. Así, por ejemplo, $10^{-3} = 1.0 \times 10^{-3}$, y $10^9 = 1.0 \times 10^9$. Un disco duro de computadora que contenga 40 gigabytes (40 Gb) contiene $40(1.0 \times 10^9) = 40 \times 10^9 = 40{,}000{,}000{,}000$ bytes. Cincuenta micras (50 μm) es $50(1.0 \times 10^{-6}) = 50 \times 10^{-6} = 0.00005$ metros. Trescientos veinticinco miligramos (325 mg) es $325\ (1 \times 10^{-3}) = 325 \times 10^{-3} = 0.325$ gramos. Observe que en la tabla cada prefijo representa un valor 10^3 o 1000 veces mayor que el prefijo anterior a él. Por ejemplo, una micra es 10^3 o 1000 veces mayor que un nanómetro. Un gigámetro es 1000 veces mayor que un megámetro, y así sucesivamente.

En la figura 4.1 observamos que las frecuencias de radio FM y VHFTV son de alrededor de 10^8 hertzios (o ciclos por segundo). Así, la frecuencia de radio FM es $10^8 = 1.0 \times 10^8 = 100{,}000{,}000$ hertzios. Este número, cien millones de hertzios, también lo expresamos como 100×10^6, o 100 megahertzios, 100 MHz.

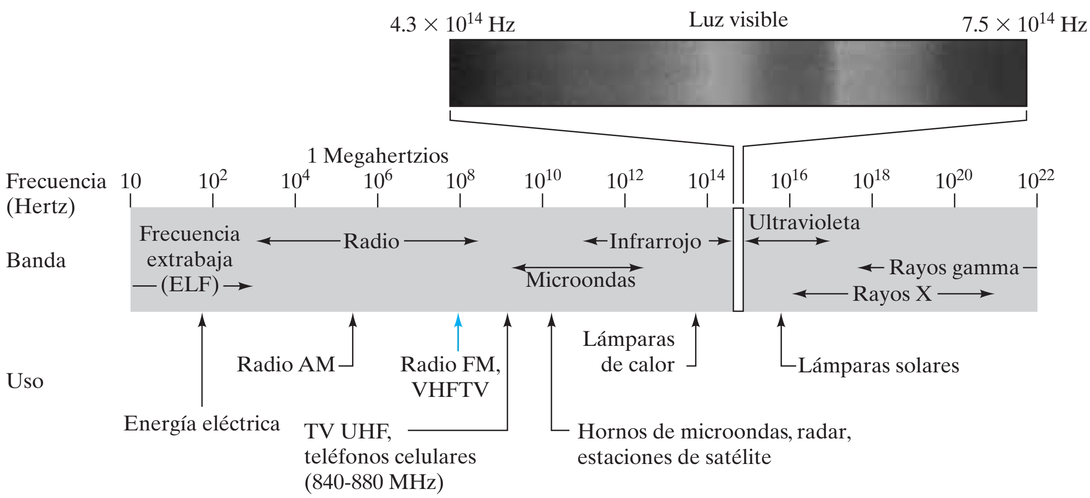


FIGURA 4.1

Ahora que ya sabemos interpretar potencias de 10 sin coeficientes numéricos, resolveremos algunos problemas empleando la notación científica.

EJEMPLO 3 Escriba cada cantidad sin el prefijo métrico.

a) 52 kilogramos **b)** 183 nanosegundos

Solución **a)** 52 kilogramos (52 kg) $= 52 \times 10^3$ gramos $= 52{,}000$ gramos

b) 183 nanosegundos (183 ns) $= 183 \times 10^{-9}$ segundos $= 0.000000183$ segundos

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 45

SUGERENCIA

CONSEJO PARA ESTUDIAR

Pensemos en la frecuencia con que cotidianamente nos enfrentamos a cantidades grandes y pequeñas que podrían expresarse por medio de notación científica. Esto nos dará más de una idea para la notación científica.

3 Hacer cálculos con notación científica

Al trabajar con números escritos en notación científica utilizamos las reglas de los exponentes que presentamos en las secciones 4.1 y 4.2.

EJEMPLO 4 Multiplicar $(4.2 \times 10^6)(2 \times 10^{-4})$. Escriba la respuesta en forma decimal.

Solución De acuerdo con las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, reacomodamos la expresión como sigue.

$$\begin{aligned}(4.2 \times 10^6)(2 \times 10^{-4}) &= (4.2 \times 2)(10^6 \times 10^{-4}) \\ &= 8.4 \times 10^{6+(-4)} && \text{Por la regla del producto.} \\ &= 8.4 \times 10^2 && \text{Notación científica.} \\ &= 840 && \text{Forma decimal.}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 55

EJEMPLO 5 Divida $\dfrac{3.2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}}$. Escriba la respuesta en notación científica.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{3.2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}} &= \left(\frac{3.2}{5}\right)\left(\frac{10^{-6}}{10^{-3}}\right) \\ &= 0.64 \times 10^{-6-(-3)} && \text{Por la regla del cociente.} \\ &= 0.64 \times 10^{-6+3} \\ &= 0.64 \times 10^{-3} \\ &= 6.4 \times 10^{-4} && \text{Notación científica.}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 61

La respuesta al ejemplo 5 en forma decimal sería 0.00064.

Uso de la calculadora

¿Qué es lo que muestra la calculadora cuando se multiplican números muy grandes o muy pequeños? La respuesta depende de si la máquina tiene capacidad para mostrar una respuesta en notación científica. En aquellas sin esta característica, es probable que aparezca un mensaje de error debido a que la respuesta sería demasiado grande o demasiado pequeña para la pantalla. Por ejemplo, en una calculadora sin notación científica, veríamos lo siguiente:

8000000 $\boxed{\times}$ 600000 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Error}}$

(Continúa en la página siguiente)

En calculadoras científicas y graficadoras veríamos la respuesta del ejemplo anterior de las posibles maneras siguientes.

Resultados posibles

8000000 $\boxed{\times}$ 600000 $\boxed{=}$ $\boxed{4.8\quad 12}$

8000000 $\boxed{\times}$ 600000 $\boxed{=}$ $\boxed{4.8\quad {}^{12}}$

8000000 $\boxed{\times}$ 600000 $\boxed{=}$ $\boxed{4.8E12}$

Cada respuesta significa 4.8×10^{12}. Veremos un ejemplo más.

Resultados posibles

0.0000003 $\boxed{\times}$ 0.004 $\boxed{=}$ $\boxed{1.2\quad -9}$

0.0000003 $\boxed{\times}$ 0.004 $\boxed{=}$ $\boxed{1.2\quad {}^{-9}}$

0.0000003 $\boxed{\times}$ 0.004 $\boxed{=}$ $\boxed{1.2E{-9}}$

Cada respuesta significa 1.2×10^{-9}. En ciertas calculadoras hay que oprimir la tecla $\boxed{\text{ENTER}}$ en lugar de la $\boxed{=}$. La calculadora graficadora TI-83 Plus muestra las respuestas con el uso de E; por ejemplo, 4.8E12.

EJEMPLO 6 **Comparación de barcos grandes** El desplazamiento bruto del crucero *Disney Magic* es alrededor de 8.5×10^4 ton. El del *Destiny* de la línea Carnival, es cerca de 1.02×10^5 ton.

a) ¿Cuánto más grande es el desplazamiento bruto del *Destiny* que el del *Disney Magic*?

b) ¿Cuántas veces más grande es el desplazamiento bruto del *Destiny* que el del *Disney Magic*?

Solución **a)** Entender Necesitamos restar 8.5×10^4 de 1.02×10^5. Para sumar o restar números en notación científica, por lo general hacemos que los exponentes sean los mismos.

Traducir Escribimos 1.02×10^5 como 10.2×10^4. Ahora se resta como sigue.

Calcular

$$\begin{array}{r} 10.2 \times 10^4 \\ -\ 8.5 \times 10^4 \\ \hline 1.7 \times 10^4 \end{array}$$

Observe que en la resta, no restamos los 10^4. Esta sustracción también la podemos efectuar así: $(10.2 \times 10^4) - (8.5 \times 10^4) = (10.2 - 8.5) \times 10^4 = 1.7 \times 10^4$

Comprobar Comprobamos escribiendo los números en forma decimal.

$$\begin{array}{r} 102{,}000 \\ -\ 85{,}000 \\ \hline 17{,}000 \end{array} \text{ o bien } 1.7 \times 10^4$$

Respuesta Como obtenemos los mismos resultados, la diferencia es 1.7×10^4 (o bien, 17,000) ton.

b) Entender El inciso **b)** parece similar al **a)**, pero planteamos una pregunta diferente porque pedimos hallar el *número de veces* mayor que es, en lugar que *cuánto más grande es*. Para esto realizamos una división.

Traducir Dividir el desplazamiento bruto del *Destiny* entre el del *Disney Magic*.

Calcular

$$\begin{aligned} \frac{1.02 \times 10^5}{8.5 \times 10^4} &= \frac{1.02}{8.5} \times \frac{10^5}{10^4} \\ &= 0.12 \times 10^{5-4} \\ &= 0.12 \times 10^1 \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

Regla del cociente para los exponentes.

Comprobar Revisa con la escritura de los números en forma decimal.

$$\frac{102{,}000}{85{,}000} = 1.2$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 75

Respuesta Como obtenemos el mismo resultado, el desplazamiento del *Destiny* es 1.2 veces mayor que el del *Disney Magic*.

EJEMPLO 7

Computadora más rápida En enero de 2002, la computadora más rápida del mundo, llamada *ASCI White*, ubicada en el Lawrence Livermore National Laboratory, en California, era capaz de realizar un solo cálculo simple en 0.000000000000083 segundos (83 mil billonésimas de segundo). ¿Cuánto tiempo tomaría a esta computadora hacer 7 mil millones (7,000,000,000) de cálculos?

Solución

Entender la computadora hace un cálculo en 1(0.000000000000083) segundos. 2 cálculos en 2(0.000000000000083) segundos, 3 cálculos en 3(0.000000000000083) segundos, y 7 mil millones de operaciones en 7,000,000,000(0.000000000000083) segundos.

La *ASCI White* cubre un área del tamaño de dos canchas de basquetbol

Traducir Multiplicaremos con la conversión de cada número en notación científica.

$$7{,}000{,}000{,}000(0.000000000000083) = (7 \times 10^9)(8.3 \times 10^{-14})$$

Calcular

$$= (7 \times 8.3)(10^9 \times 10^{-14})$$
$$= 58.1 \times 10^{-5}$$
$$= 0.000581$$

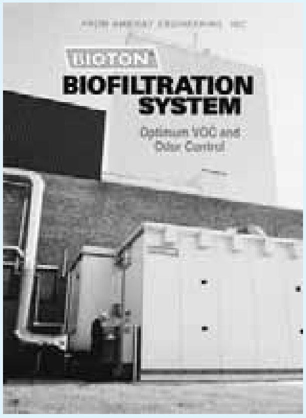
AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 79

Respuesta A la *ASCI White* le tomaría 0.000581 segundos para realizar 7 mil millones de cálculos.

Matemáticas en acción

El aire que respiramos

La Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés) ha identificado la calidad del aire de los interiores como la preocupación sanitaria número uno del presente. Lo que provoca que la calidad del aire de los interiores sea baja, es, con mucho, la mala calidad del aire del exterior, en particular en las áreas urbanas. Contaminantes como polvo, polen y de origen automotriz, con frecuencia encuentran un camino hacia el interior de los edificios. Con más y más productos químicos en uso, la gente sufre cada vez más de hipersensibilidad química a los formaldehídos, pesticidas, ozono, solventes para limpieza, fibra de vidrio, asbestos, plomo y radón. Las alergias a los plásticos hoy están más difundidas que nunca. Ningún edificio o sitio de trabajo está a salvo.



Para los sitios de trabajo relacionados con farmacéuticos y biotecnología, el asunto del aire libre de contaminantes es aún más crucial. Un tipo de filtro que utilizamos en esta clase de instalaciones es el HEPA (High Efficiency Particulate Air), que fue desarrollado originalmente para retirar contaminantes radiactivos del aire durante el desarrollo de la primera bomba atómica.

La ciencia de la filtración involucra la captura de objetos que van desde el polvo de carbón a los virus. Es común expresar el tamaño de las partículas que filtramos en micras, donde 1 micra (abreviatura de 1 micrómetro) = 1 millónesima de metro = 10^{-6} metros = 0.000001 metros. La medición indica el diámetro de la partícula.

A continuación presentamos una lista de los tipos de partículas para los que hemos desarrollado sistemas de filtración; los rangos de su diámetro se dan en micras y en metros.

	Micras	Metros
Polen	10–100	10^{-5}–10^{-4}
Humo de cigarro	0.01–1	10^{-8}–10^{-6}
Talco, mineral	0.4–80	4×10^{-7}–8×10^{-5}
Polvo dañino para los pulmones	0.8–6	8×10^{-7}–6×10^{-6}
Bacteria	0.5–50	5×10^{-7}–5×10^{-5}
Virus	0.002–0.08	2×10^{-9}–8×10^{-8}

Conjunto de ejercicios 4.3

Ejercicios conceptuales

1. Describa la forma de un número dado en notación científica.
2. a) Describa con sus propias palabras cómo escribimos un número igual o mayor que 10, en notación científica.
   b) Con el uso del procedimiento descrito en el inciso **a)**, escriba 42,100 en notación científica.
3. a) Con sus propias palabras, describa cómo escribimos un número menor que 1 en notación científica.
   b) Por medio del procedimiento descrito en el inciso **a)**, escriba 0.00568 en notación científica.
4. ¿Cuántos lugares y en qué dirección hay que mover el punto decimal cuando convertimos un número de notación

Avance de la lección

En este capítulo estudiaremos raíces, expresiones con radicales y ecuaciones con radicales, resaltando las raíces cuadradas. Éstas son un tipo de expresiones radicales. En las secciones 9.1 a 9.4 aprenderemos a evaluar una raíz cuadrada, a simplificar expresiones con radicales y a sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones que incluyen raíces cuadradas. En la sección 9.5 analizaremos la solución de ecuaciones que tienen raíces cuadradas. La sección 9.6, Radicales: Aplicaciones y solución de problemas, es una ampliación de la sección 9.5 y presenta algunos usos de las raíces cuadradas en la vida real. En la sección 9.7 analizaremos raíces cúbicas y raíces de orden superior. Sugerimos de manera muy enfática que utilice una calculadora científica o graficadora para éste y el capítulo siguiente.

Las expresiones y ecuaciones con radicales desempeñan un papel importante en las matemáticas y en las ciencias. Muchas fórmulas matemáticas y científicas incluyen radicales. Como veremos en el capítulo 10, una de las fórmulas más importantes en matemáticas, la fórmula cuadrática, incluye una raíz cuadrada.

9.1 EVALUACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS

1. Evaluar raíces cuadradas de números reales.
2. Reconocer que no todas las raíces cuadradas representan números reales.
3. Determinar si la raíz cuadrada de un número real es racional o irracional.
4. Escribir raíces cuadradas como expresiones exponenciales.

1 Evaluar raíces cuadradas de números reales

Anteriormente analizamos cómo determinar el cuadrado de un número. Recuerde que cuando elevamos al cuadrado un número, lo multiplicamos por él mismo. Por ejemplo,

$$\text{Si } a = 5, \text{ entonces } a^2 = 5 \cdot 5 = 25$$
$$\text{Si } a = -5, \text{ entonces } a^2 = (-5)(-5) = 25$$

En este capítulo consideramos el problema inverso. Es decir, si conocemos el cuadrado de un número, ¿cuál es ese número? Por ejemplo,

$$\text{Si } a^2 = 25, \text{ entonces ¿cuáles son los valores } a?$$

En la proposición anterior, para determinar a debemos encontrar los valores que al multiplicarse por sí mismos, su producto sea 25. Como $5 \cdot 5 = 25$ y $(-5)(-5) = 25$, a tiene dos valores, -5 y 5.

La determinación de la **raíz cuadrada** de un número dado es el proceso inverso de elevar al cuadrado un número. Cuando encontramos la raíz cuadrada de un número dado, estamos determinando qué números, cuando se multiplican por ellos mismos, tienen como resultado el número dado. Todo número real mayor que 0 tiene dos raíces cuadradas, una raíz cuadrada positiva y una negativa. Por ejemplo, el número 25 tiene dos raíces cuadradas, -5 y 5. Utilizamos el símbolo $\sqrt{}$ para indicar la **raíz cuadrada positiva** o **principal** de un número. Por ejemplo,

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{(La raíz cuadrada principal de 25 es 5.)}$$

Utilizamos el símbolo $-\sqrt{}$ para denotar a la raíz cuadrada negativa de un número. Por ejemplo,

$$-\sqrt{25} = -5 \quad \text{(La raíz cuadrada negativa de 25 es } -5\text{.)}$$

La raíz cuadrada negativa es el inverso aditivo u opuesto de la raíz cuadrada principal. El material del siguiente recuadro resume esta información y proporciona información acerca de las raíces cuadradas.

RAÍCES CUADRADAS

La **raíz cuadrada positiva** o **principal** de un número positivo, a, se escribe como $\sqrt{a}$. La raíz cuadrada negativa se escribe como $-\sqrt{a}$.

$$\sqrt{a} = b \quad \text{si} \quad b^2 = a$$

Además, la raíz cuadrada de 0 es 0, se escribe $\sqrt{0} = 0$.

Observe que **la raíz cuadrada principal de un número positivo, *a*, es el número positivo cuyo cuadrado es igual a *a*. En este libro, siempre que utilicemos el término raíz cuadrada, nos referiremos a la raíz cuadrada positiva o principal.**

Las raíces cuadradas son un tipo de expresiones radicales que utilizará tanto en matemáticas como en ciencias.

$\sqrt{x}$ se lee "la raíz cuadrada de x".

El símbolo $\sqrt{}$ se denomina **radical**. El número o expresión dentro del radical se denomina **radicando**.

Radical.

$$\sqrt{x}$$

Radicando.

Denominamos **expresión radical** (o expresión con radical) a toda la expresión, incluyendo el radical y el radicando.

Otra parte de una expresión radical es su **índice**. El índice indica la "raíz" de la expresión. Las raíces cuadradas tienen un índice de 2. Por lo común, el índice de una raíz cuadrada no se escribe.

Índice

$$\sqrt{x} \quad \text{significa} \quad \sqrt[2]{x}$$

Otro tipo de expresiones con radical tienen índices diferentes. Por ejemplo, $\sqrt[3]{x}$, que se lee "raíz cúbica de x", tiene un índice de 3. Las raíces cúbicas se analizan en la sección 9.7.

Ahora determinemos algunas raíces cuadradas.

	Ejemplos
$\sqrt{25} = 5$	ya que $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
$\sqrt{64} = 8$	ya que $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$	ya que $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

EJEMPLO 1 Evalúe. **a)** $\sqrt{81}$ **b)** $\sqrt{100}$

Solución

a) $\sqrt{81} = 9$ ya que $9^2 = (9)(9) = 81$

b) $\sqrt{100} = 10$ ya que $(10)^2 = (10)(10) = 100$

EJEMPLO 2 Evalúe. **a)** $-\sqrt{81}$ **b)** $-\sqrt{100}$

Solución **a)** $\sqrt{81} = 9$. Ahora tomamos el opuesto de ambos lados para obtener

$$-\sqrt{81} = -9$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 21

b) De forma análoga, $-\sqrt{100} = -10$.

2 Reconocer que no todas las raíces cuadradas representan números reales

Debe entender que las **raíces cuadradas de números negativos no son números reales**. Considere $\sqrt{-4}$; ¿a qué es igual $\sqrt{-4}$? Para evaluar $\sqrt{-4}$, debemos encontrar algún número cuyo cuadrado sea igual a -4. Pero sabemos que el cuadrado de cualquier número real distinto de cero debe ser un número positivo. Por tanto, ningún número real elevado al cuadrado es igual a -4, por lo que $\sqrt{-4}$ no es un número real. Los números como $\sqrt{-4}$, o raíces cuadradas de cualquier número negativo, se denominan **números imaginarios**. Estudiaremos los números imaginarios en la sección 10.5.

EJEMPLO 3 Indique si la expresión radical es un número real o un número imaginario.

a) $-\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{-16}$ **c)** $\sqrt{-37}$ **d)** $-\sqrt{37}$

Solución **a)** Real (igual a -4) **b)** Imaginario **c)** Imaginario **d)** Real.

SUGERENCIA

La raíz cuadrada de cualquier número no negativo será un número real. La raíz cuadrada de cualquier número negativo será un número imaginario.

Ejemplos de números *reales*

$-\sqrt{9}$, $-\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt{6.74}$, $-\sqrt{16}$

↑ Los radicandos son números positivos

Ejemplos de números *imaginarios*

$\sqrt{-9}$, $\sqrt{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt{-6.74}$, $\sqrt{-16}$

↑ Los radicandos son números negativos

Suponga que tenemos una expresión como $\sqrt{x}$, en donde x representa algún número. Para que el radical $\sqrt{x}$ sea un número real, y no imaginario, debemos suponer que x es un número no negativo.

En este capítulo, a menos que se diga otra cosa, supondremos que todas las expresiones que son radicandos representan números no negativos.

3 Determinar si la raíz cuadrada de un número real es racional o irracional

Para ayudar en nuestro estudio de números racionales e irracionales, definiremos los cuadrados perfectos. Los números 1, 4, 9, 16, 36, 49,… se denominan **cuadrados perfectos** ya que cada número es *el cuadrado de un número natural*. Cuando un cuadrado perfecto es un factor de un radicando, podemos hacer referencia a él como un **factor cuadrado perfecto**.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots$ *Números naturales.*

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ \ldots$ *Los cuadrados de los números naturales.*

$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$ *Cuadrados perfectos.*

¿Cuáles son los dos siguientes cuadrados perfectos? Observe que la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es un entero. Esto es, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, y así sucesivamente.

La tabla 9.1 ilustra los primeros 20 cuadrados perfectos. Cuando simplifique expresiones radicales puede consultar esta tabla.

TABLA 9.1

Cuadrado perfecto	Raíz cuadrada de un cuadrado perfecto		Valor	Cuadrado perfecto	Raíz cuadrada de un cuadrado perfecto		Valor
1	$\sqrt{1}$	=	1	121	$\sqrt{121}$	=	11
4	$\sqrt{4}$	=	2	144	$\sqrt{144}$	=	12
9	$\sqrt{9}$	=	3	169	$\sqrt{169}$	=	13
16	$\sqrt{16}$	=	4	196	$\sqrt{196}$	=	14
25	$\sqrt{25}$	=	5	225	$\sqrt{225}$	=	15
36	$\sqrt{36}$	=	6	256	$\sqrt{256}$	=	16
49	$\sqrt{49}$	=	7	289	$\sqrt{289}$	=	17
64	$\sqrt{64}$	=	8	324	$\sqrt{324}$	=	18
81	$\sqrt{81}$	=	9	361	$\sqrt{361}$	=	19
100	$\sqrt{100}$	=	10	400	$\sqrt{400}$	=	20

Un **número racional** es aquel que puede escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, en donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Ejemplos de números racionales son $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{9}{2}, 4$, y 0. Todos los enteros son números racionales, ya que pueden expresarse con un denominador de 1. Por ejemplo, $4 = \frac{4}{1}$ y $0 = \frac{0}{1}$. Las raíces cuadradas de cuadrados perfectos también son números racionales, ya que cada uno es un entero. Cuando un número racional se escribe en forma decimal, será un decimal exacto o un decimal que se repite.

Decimales exactos	Decimales que se repiten
$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$
$\frac{5}{8} = 0.625$	$\frac{4}{9} = 0.444\ldots$
$\sqrt{4} = 2.0$	$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$

Los números reales que no son números racionales se denominan **números irracionales**. Cuando éstos se escriben como decimales, no terminan ni se repiten. La raíz cuadrada de todo entero positivo que no sea cuadrado perfecto es un número irracional. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales. Las 20 raíces cuadradas listadas en la tabla 9.1 son números racionales. Cualquier otra raíz cuadrada de un entero entre 1 y 400 es un número irracional. Por ejemplo, como $\sqrt{50}$ es menor que $\sqrt{400}$ y no está en la tabla 9.1, es un número irracional. Además, como $\sqrt{50}$ está entre $\sqrt{49}$ y $\sqrt{64}$ en la tabla 9.1, el valor de $\sqrt{50}$ está entre 7 y 8. Si evalúa $\sqrt{50}$ con una calculadora, como explicaremos en el recuadro de la página siguiente, encontrará que $\sqrt{50} \approx 7.07$, redondeado al centésimo más cercano. Observe que como $\sqrt{50}$ es un poco mayor que $\sqrt{49}$, el valor de $\sqrt{50}$ es un poco mayor que 7.

Uso de la calculadora

Cómo evaluar raíces cuadradas con una calculadora

Podemos utilizar la tecla de raíz cuadrada en las calculadoras para determinar raíces cuadradas de números no negativos.

En algunas calculadoras científicas, para determinar la raíz cuadrada de 4, presionamos

Respuesta mostrada.

$$4 \ \boxed{\sqrt{x}} \ 2$$

En la calculadora graficadora TI-83 Plus, para determinar la raíz cuadrada de 4, presionamos

$$\boxed{2^{\text{nd}}} \ \boxed{x^2} \ (\ 4 \ \boxed{)} \ \boxed{\text{ENTER}} \ 2$$

Para obtener $\sqrt{\ }$ Mostrado por la TI-83 Plus.

Ambas calculadoras muestran la respuesta 2. Como 2 es un entero, $\sqrt{4}$ es un número racional.

Si evaluamos $\sqrt{7}$, ¿qué mostraría la calculadora? La pantalla mostraría 2.6457513. Observe que $\sqrt{7}$ es un número irracional, o un decimal que no es exacto ni se repite. El valor decimal de $\sqrt{7}$, o de cualquier otro número irracional, nunca puede darse de forma exacta. Las respuestas dadas en la pantalla de una calculadora sólo son aproximaciones cercanas de su valor.

Suponga que tratamos de evaluar $\sqrt{-4}$ en una calculadora. ¿Cuál sería la respuesta que daría la calculadora? En una calculadora científica, presionamos:

Respuesta mostrada.

$$4 \ \boxed{^{+}/_{-}} \ \boxed{\sqrt{x}} \ \text{Error}$$

En una calculadora graficadora TI-83 Plus, presionamos

Respuesta mostrada.

$$\boxed{2^{\text{nd}}} \ \boxed{x^2} \ (\ \boxed{(-)} \ 4 \ \boxed{)} \ \boxed{\text{ENTER}} \ \text{ERR: NONREAL ANS}$$

Ambas calculadoras darían un mensaje de error, ya que la raíz cuadrada de -4, o la raíz cuadrada de cualquier otro número negativo, no es un número real.

Ejercicios

Utilice su calculadora para evaluar cada raíz cuadrada.

1. $\sqrt{15}$ **2.** $\sqrt{151}$ **3.** $\sqrt{-16}$ **4.** $\sqrt{27}$

La figura 9.1 muestra la relación entre los diferentes tipos de números que estudiamos. Observe que los números racionales junto con los números irracionales forman los números reales, y los números imaginarios no son números reales, y viceversa.

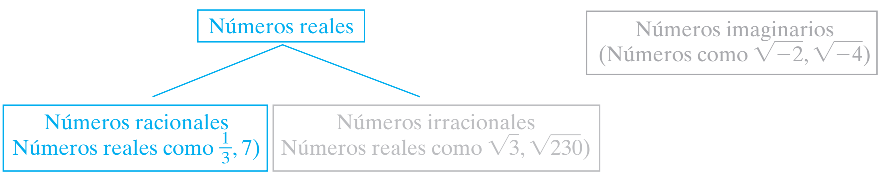


FIGURA 9.1

Al evaluar los radicales, podríamos utilizar el símbolo *es aproximadamente igual a*, $\approx$. Por ejemplo, podríamos escribir $\sqrt{2} \approx 1.414$. Eso se lee "la raíz cuadrada de 2 es aproximadamente igual a 1.414". Recuerde que 2 no es un cuadrado perfecto, así que su raíz cuadrada no puede evaluarse de manera exacta.

EJEMPLO 4 Utilice su calculadora o la tabla 9.1 para determinar si las raíces cuadradas siguientes son números racionales o irracionales.

a) $\sqrt{123}$ **b)** $\sqrt{196}$ **c)** $\sqrt{326}$ **d)** $\sqrt{289}$

Solución **a)** Irracional **b)** Racional, igual a 14

c) Irracional **d)** Racional, igual a 17

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 61

4 Escribir raíces cuadradas como expresiones exponenciales

Las expresiones radicales pueden escribirse en forma exponencial. Ya que hemos estudiado las raíces cuadradas, mostraremos cómo escribir raíces cuadradas en forma exponencial. Analizaremos la escritura de otros radicales en forma exponencial en la sección 9.7. Introducimos esta información aquí ya que podríamos utilizar la forma exponencial como una ayuda para explicar ciertos conceptos.

Recuerde que el índice de una raíz cuadrada es 2. Por ejemplo,

$$\sqrt{x} \quad \text{significa} \quad \sqrt[2]{x}$$

Utilizamos el índice, 2, al escribir raíces cuadradas en forma exponencial. Para cambiar una expresión en la forma de raíz cuadrada a una expresión en la forma exponencial, simplemente escriba el radicando de la raíz cuadrada elevado a la potencia 1/2, como sigue:

Cómo escribir una raíz cuadrada en forma exponencial

$$\sqrt{\blacksquare} = \blacksquare^{1/2} \leftarrow \text{Índice de la raíz cuadrada.}$$

Radicando.

Por ejemplo, $\sqrt{8}$ en forma exponencial es $8^{1/2}$, y $\sqrt{5ab} = (5ab)^{1/2}$. Otros ejemplos son

Forma de raíz cuadrada		Forma exponencial
$\sqrt{25}$	=	$(25)^{1/2}$
$\sqrt{2x}$	=	$(2x)^{1/2}$
$\sqrt{15x^2y}$	=	$(15x^2y)^{1/2}$

EJEMPLO 5 Escriba cada expresión radical en forma exponencial.

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{10x}$

Solución **a)** $3^{1/2}$ **b)** $(10x)^{1/2}$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 69

También podemos convertir una expresión de la forma exponencial a la forma radical. Para hacerlo, invertimos el proceso. Por ejemplo, $(6x)^{1/2}$ puede escribirse como $\sqrt{6x}$, y $(20x^4)^{1/2}$ puede escribirse como $\sqrt{20x^4}$.

Podemos aplicar las leyes o reglas de los exponentes presentadas en las secciones 4.1 y 4.2 a los exponentes racionales (o fraccionarios). Por ejemplo,

$$(x^2)^{1/2} = x^{2(1/2)} = x^1 = x$$
$$(xy)^{1/2} = x^{1/2}y^{1/2}$$
y $$x^{1/2} \cdot x^{3/2} = x^{(1/2)+(3/2)} = x^{4/2} = x^2$$

Conjunto de ejercicios 9.1

Ejercicios conceptuales

1. ¿Cuál es la raíz cuadrada principal de un número real positivo a?
2. **a)** ¿Qué indica el índice en una expresión radical?
   b) ¿Cómo se denomina la expresión dentro del radical?
3. Explique la diferencia entre un número racional y un número irracional.
4. Siempre que veamos una expresión dentro de una raíz cuadrada, ¿que suposición haremos acerca de la expresión? ¿Por qué hacemos esta suposición?
5. Explique cómo determinaría si la raíz cuadrada de un entero positivo menor que 400 es un número racional o irracional **a)** por medio de una calculadora, y **b)** sin el uso de una calculadora.
6. Explique por qué la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.
7. ¿Es correcta la expresión $\sqrt{25} = 5$? Explique.
8. ¿Es correcta la expresión $\sqrt{25} = -5$? Explique.
9. ¿Es correcta la expresión $\sqrt{-25} = -5$? Explique.
10. ¿Es correcta la expresión $-\sqrt{25} = -5$? Explique.
11. ¿$\sqrt{\frac{16}{25}}$ es un número racional? Explique.
12. ¿$\sqrt{\frac{13}{15}}$ es un número racional? Explique.

Práctica de habilidades

Evalúe cada raíz cuadrada.

13. $\sqrt{0}$
14. $\sqrt{16}$
15. $\sqrt{1}$
16. $\sqrt{64}$
17. $-\sqrt{49}$
18. $\sqrt{4}$
19. $\sqrt{400}$
20. $\sqrt{100}$
21. $-\sqrt{16}$
22. $-\sqrt{36}$
23. $\sqrt{144}$
24. $\sqrt{49}$
25. $\sqrt{169}$
26. $\sqrt{225}$
27. $-\sqrt{1}$
28. $-\sqrt{100}$
29. $\sqrt{81}$
30. $-\sqrt{49}$
31. $-\sqrt{121}$
32. $-\sqrt{196}$
33. $\sqrt{\frac{1}{4}}$
34. $\sqrt{\frac{25}{4}}$
35. $\sqrt{\frac{36}{49}}$
36. $\sqrt{\frac{25}{64}}$
37. $-\sqrt{\frac{25}{36}}$
38. $-\sqrt{\frac{100}{144}}$
39. $\sqrt{\frac{81}{49}}$
40. $\sqrt{\frac{121}{169}}$

Utilice su calculadora para evaluar cada raíz cuadrada. Escriba su respuesta con siete decimales.

41. $\sqrt{12}$
42. $\sqrt{2}$
43. $\sqrt{15}$
44. $\sqrt{30}$
45. $\sqrt{80}$
46. $\sqrt{79}$
47. $\sqrt{324}$
48. $\sqrt{121}$
49. $\sqrt{97}$
50. $\sqrt{43}$
51. $\sqrt{3}$
52. $\sqrt{40}$

Indique si cada proposición es verdadera o falsa.

53. $\sqrt{18}$ es un número racional.
54. $\sqrt{-25}$ es un número real.
55. $\sqrt{25}$ es un número racional.
56. $\sqrt{5}$ es un número irracional.
57. $\sqrt{4}$ es un número irracional.
58. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ es un número racional.
59. $\sqrt{\frac{9}{16}}$ es un número racional.
60. $\sqrt{231}$ es un número racional.
61. $\sqrt{125}$ es un número irracional.
62. $\sqrt{27}$ es un número irracional.
63. $\sqrt{(15)^2}$ es un número entero.
64. $\sqrt{(12)^2}$ es un número entero.

c) Utilizando estos dos ejemplos, ¿puede concluir a qué es igual $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (siempre que $a \geq 0, b > 0$)?

d) Cree su propio problema como los dados en los incisos **a)** y **b)** para ver si la respuesta que dio en el inciso **c)** funciona con sus números.

Las reglas de los exponentes estudiadas en el capítulo 4, también son válidas con exponentes racionales. Utilice las reglas de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones. En la sección 9.7 analizaremos problemas como éstos.

91. $(x^3)^{1/2}$

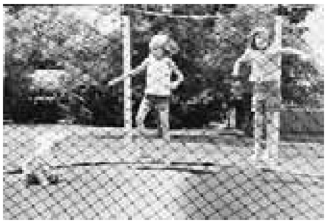
92. $(x^4)^{1/2}$

93. $x^{1/2} \cdot x^{5/2}$

94. $x^{3/2} \cdot x^{1/2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.3] **95. Salto en un trampolín** Allison saltó durante un minuto en un trampolín, y luego su mamá Elizabeth saltó en el trampolín durante un minuto. Si Allison dio el doble de saltos que su madre, y el número total de saltos fue 78, determine el número de saltos que dio Allison.



[6.6] *Resuelva*

96. $\dfrac{2x}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{2}{x + 2}$

97. $\dfrac{4x}{x^2 + 6x + 9} - \dfrac{2x}{x + 3} = \dfrac{x + 1}{x + 3}$

[7.3] **98.** Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(6, 7)$.

[7.6] **99.** Si $f(x) = x^2 - 4x - 5$, determine $f(-3)$.

9.2 SIMPLIFICACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS

1 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen constantes.

2 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen variables.

1 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen constantes

En esta sección, para simplificar raíces cuadradas utilizaremos la **regla del producto para raíces cuadradas.**

Regla del producto para raíces cuadradas

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, \quad \text{siempre que} \quad a \geq 0, b \geq 0 \qquad \text{Regla 1}$$

La regla del producto indica que el producto de dos raíces cuadradas es igual a la raíz cuadrada del producto de los radicandos. La regla del producto sólo se aplica cuando tanto a como b son no negativos, ya que las raíces cuadradas de números negativos no son números reales.

Ejemplos de la regla del producto

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1}\cdot\sqrt{60} &= \sqrt{1\cdot 60}\\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{30} &= \sqrt{2\cdot 30}\\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{20} &= \sqrt{3\cdot 20}\\ \sqrt{4}\cdot\sqrt{15} &= \sqrt{4\cdot 15}\\ \sqrt{6}\cdot\sqrt{10} &= \sqrt{6\cdot 10}\end{aligned}\right\} = \sqrt{60}$$

Observe que $\sqrt{60}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

Cuando dos raíces cuadradas se colocan una junto a la otra, las raíces cuadradas se están multiplicando. Por tanto, $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ significa $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Para simplificar la raíz cuadrada de una constante

1. Escriba la constante como un producto del factor más grande que sea cuadrado perfecto y otro factor.
2. Utilice la regla del producto para escribir la expresión como un producto de raíces cuadradas; cada raíz cuadrada tendrá como radicando uno de los factores.
3. Determine la raíz cuadrada del factor que es cuadrado perfecto.

EJEMPLO 1 Simplifique $\sqrt{60}$.

Solución El único factor cuadrado perfecto de 60 es 4.

$$\begin{aligned}\sqrt{60} &= \sqrt{4\cdot 15}\\ &= \sqrt{4}\cdot\sqrt{15}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

Como 15 no es un cuadrado perfecto y no tiene factores que sean cuadrados perfectos, esta expresión no puede simplificarse más. La expresión $2\sqrt{15}$ se lee "dos veces la raíz cuadrada de quince". ✺

EJEMPLO 2 Simplifique $\sqrt{12}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} &= \sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

✺

EJEMPLO 3 Simplifique $\sqrt{80}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} &= \sqrt{16}\cdot\sqrt{5}\\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

✺

EJEMPLO 4 Simplifique $\sqrt{245}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{245} = \sqrt{49\cdot 5} &= \sqrt{49}\cdot\sqrt{5}\\ &= 7\sqrt{5}\end{aligned}$$

✺

SUGERENCIA

Al simplificar una raíz cuadrada, no es raro utilizar un factor que sea cuadrado perfecto pero que no sea el factor cuadrado perfecto *más grande* del radicando. Nuevamente, consideremos el ejemplo 3. Cuatro también es un factor de 80 que es cuadrado perfecto.

$$\sqrt{80} = \sqrt{4\cdot 20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{20} = 2\sqrt{20}$$

(continúa en la página siguiente)

Como 20 también tiene un factor 4, que es cuadrado perfecto, el problema aún no termina. En lugar de iniciar, otra vez, con el problema completo, puede continuar el proceso de simplificación como sigue

$$\sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 2\sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\cdot 2\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Ahora el resultado coincide con la respuesta en el ejemplo 3.

EJEMPLO 5 Simplifique $\sqrt{140}$.

Solución

$$\sqrt{140} = \sqrt{4\cdot 35} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{35}$$
$$= 2\sqrt{35}$$

Aunque 35 se puede factorizar como $5\cdot 7$, ninguno de estos factores es un cuadrado perfecto. Así, la respuesta no puede simplificarse más.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 21

2 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen variables

Ahora simplificaremos raíces cuadradas que tienen variables en el radicando.

En la sección 9.1 notamos que ciertos números eran **cuadrados perfectos**. También nos referiremos a ciertas expresiones que tienen una variable como cuadrados perfectos. Cuando un radical tiene una variable (o número) elevado a un **exponente par**, esa variable (o número) junto con el exponente forma un cuadrado perfecto. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^4}$, el término x^4 es un cuadrado perfecto ya que el exponente 4 es par. En la expresión $\sqrt{x^5}$, x^5 no es un cuadrado perfecto ya que el exponente es impar. Sin embargo, x^4 es un **factor cuadrado perfecto** de x^5 porque x^4 es un cuadrado perfecto y x^4 es un factor de x^5. Observe que $x^5 = x^4\cdot x$.

Para evaluar raíces cuadradas cuando el radicando es un cuadrado perfecto, utilizamos la siguiente regla.

$$\sqrt{a^{2\cdot n}} = a^n, \qquad a \geq 0 \qquad \text{Regla 2}$$

Esta regla indica que **la raíz cuadrada de una variable elevada a una potencia par es igual a la variable elevada a la mitad de esa potencia**. Para explicar esta regla, podemos escribir la expresión con raíz cuadrada $\sqrt{a^{2n}}$ en forma exponencial y luego simplificar como sigue.

$$\sqrt{a^{2n}} = (a^{2n})^{1/2} = a^{2n(1/2)} = a^n$$

A continuación se dan ejemplos de la regla 2. Recuerde que estamos asumiendo que las variables representan números reales no negativos.

Ejemplos

$$\sqrt{x^2} = x$$
$$\sqrt{a^4} = a^2$$
$$\sqrt{y^{16}} = y^8$$
$$\sqrt{z^{28}} = z^{14}$$

Un caso especial de la regla 2 (cuando $n = 1$) es

$$\boldsymbol{\sqrt{a^2} = a, \qquad a \geq 0}$$

EJEMPLO 6 Simplifique **a)** $\sqrt{x^{30}}$ **b)** $\sqrt{x^4y^6}$ **c)** $\sqrt{a^{10}b^2}$ **d)** $\sqrt{y^{12}z^{18}}$

Solución

a) $\sqrt{x^{30}} = x^{15}$ **b)** $\sqrt{x^4y^6} = \sqrt{x^4}\sqrt{y^6} = x^2y^3$

c) $\sqrt{a^{10}b^2} = \sqrt{a^{10}}\sqrt{b^2} = a^5b$ **d)** $\sqrt{y^{12}z^{18}} = \sqrt{y^{12}}\sqrt{z^{18}} = y^6z^9$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 35

Para simplificar la raíz cuadrada de un radicando que tiene una variable elevada a una potencia impar

1. Exprese la variable como el producto de dos factores, uno de los cuales tiene un exponente de 1 (por tanto, el otro será un cuadrado perfecto).
2. Utilice la regla del producto para simplificar.

El radicando de su respuesta simplificada no debe tener ningún factor que sea cuadrado perfecto o alguna variable con un exponente mayor a 1.

Los ejemplos 7 y 8 ilustran el procedimiento anterior

EJEMPLO 7 Simplifique **a)** $\sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt{y^7}$ **c)** $\sqrt{a^{79}}$

Solución

a) $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}$ *(Recuerde que x significa x^1).*

$= x \cdot \sqrt{x}$ o bien $x\sqrt{x}$

b) $\sqrt{y^7} = \sqrt{y^6 \cdot y^1} = \sqrt{y^6} \cdot \sqrt{y}$

$= y^3\sqrt{y}$

c) $\sqrt{a^{79}} = \sqrt{a^{78} \cdot a} = \sqrt{a^{78}} \cdot \sqrt{a}$

$= a^{39}\sqrt{a}$ ✺

Radicales más complejos pueden simplificarse por medio de la regla del producto para radicales y los principios analizados en esta sección.

EJEMPLO 8 Simplifique. **a)** $\sqrt{25x^3}$ **b)** $\sqrt{50x^2}$ **c)** $\sqrt{50x^3}$

Solución Escriba cada expresión como el producto de raíces cuadradas, una de las cuales tiene un radicando que es un cuadrado perfecto.

a) $\sqrt{25x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{x} = 5x\sqrt{x}$

b) $\sqrt{50x^2} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2} = 5x\sqrt{2}$

c) $\sqrt{50x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2x} = 5x\sqrt{2x}$ ✺

EJEMPLO 9 Simplifique. **a)** $\sqrt{50x^2y}$ **b)** $\sqrt{45x^3y^4}$ **c)** $\sqrt{98a^9b^7}$

Solución

a) $\sqrt{50x^2y} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2y}$ *Escriba $\sqrt{50x^2y}$ como producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.*

$= 5x\sqrt{2y}$ *Simplifique el factor cuadrado perfecto.*

b) $\sqrt{45x^3y^4} = \sqrt{9x^2y^4} \cdot \sqrt{5x}$ *Escriba $\sqrt{45x^3y^4}$ como producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.*

$= 3xy^2\sqrt{5x}$ *Simplifique el factor cuadrado perfecto.*

c) $\sqrt{98a^9b^7} = \sqrt{49a^8b^6} \cdot \sqrt{2ab}$ *Escriba $\sqrt{98a^9b^7}$ como producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.*

$= 7a^4b^3\sqrt{2ab}$ *Simplifique el factor cuadrado perfecto.* ✺

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 45

Ahora veamos un ejemplo en donde utilizamos la regla del producto para multiplicar dos radicales antes de simplificar.

EJEMPLO 10 Multiplique y luego simplifique.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8}$ **c)** $(\sqrt{3x})^2$

Solución **a)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16x} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

c) $(\sqrt{3x})^2 = \sqrt{3x}\cdot\sqrt{3x} = \sqrt{9x^2} = 3x$

EJEMPLO 11 Multiplique y luego simplifique.

a) $\sqrt{8x^3y}\,\sqrt{4xy^5}$ **b)** $\sqrt{5ab^8}\,\sqrt{6a^5b}$

Solución **a)** $\sqrt{8x^3y}\,\sqrt{4xy^5} = \sqrt{32x^4y^6} = \sqrt{16x^4y^6}\cdot\sqrt{2}$
$= 4x^2y^3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5ab^8}\,\sqrt{6a^5b} = \sqrt{30a^6b^9} = \sqrt{a^6b^8}\cdot\sqrt{30b}$
$= a^3b^4\sqrt{30b}$

En el inciso **b)**, se puede factorizar 30 de varias maneras. Sin embargo, ninguno de los factores es cuadrado perfecto, así que dejamos la respuesta como está dada.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 63

Conjunto de ejercicios 9.2

Ejercicios conceptuales

1. Establezca la regla del producto para raíces cuadradas y explique lo que significa.

2. a) Explique cómo simplificar una raíz cuadrada que sólo tiene una constante.

b) Simplifique $\sqrt{20}$ utilizando el procedimiento que dio en el inciso **a)**.

3. Explique por qué la regla del producto no puede utilizarse para simplificar el problema $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$.

4. Aprendimos que para $a \geq 0$, $\sqrt{a^{2\cdot n}} = a^n$. Explique lo que significa.

5. a) Explique cómo simplificar la raíz cuadrada de un radical que tiene una variable elevada a una potencia impar.

b) Con el procedimiento que dio en el inciso **a)**, simplifique $\sqrt{x^{13}}$.

6. a) Explique por qué $\sqrt{32x^3}$ no es una expresión simplificada.

b) Simplifique $\sqrt{32x^3}$.

7. a) Explique por qué $\sqrt{75x^5}$ no es una expresión simplificada.

b) Simplifique $\sqrt{75x^5}$.

8. Utilice la regla del producto para escribir $\sqrt{40}$ como un producto con cuatro factores diferentes.

Determine si la raíz cuadrada del lado derecho del signo igual es la forma simplificada de la raíz cuadrada del lado izquierdo del signo igual. Si no es así, simplifíquela de manera adecuada.

9. $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ **10.** $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$ **11.** $\sqrt{32} = 2\sqrt{8}$ **12.** $\sqrt{x^9} = x\sqrt{x^7}$

Práctica de habilidades

Simplifique.

13. $\sqrt{12}$ **14.** $\sqrt{18}$ **15.** $\sqrt{8}$ **16.** $\sqrt{45}$

17. $\sqrt{96}$ **18.** $\sqrt{75}$ **19.** $\sqrt{32}$ **20.** $\sqrt{52}$

21. $\sqrt{160}$ **22.** $\sqrt{44}$ **23.** $\sqrt{80}$ **24.** $\sqrt{27}$

25. $\sqrt{72}$ **26.** $\sqrt{147}$ **27.** $\sqrt{140}$ **28.** $\sqrt{180}$

29. $\sqrt{243}$ **30.** $\sqrt{135}$ **31.** $\sqrt{150}$ **32.** $\sqrt{x^4}$

33. $\sqrt{x^6}$ **34.** $\sqrt{y^{13}}$ **35.** $\sqrt{x^2y^4}$ **36.** $\sqrt{xy^2}$

37. $\sqrt{a^{12}b^9}$ **38.** $\sqrt{x^4y^5z^6}$ **39.** $\sqrt{a^2b^4c}$ **40.** $\sqrt{a^3b^9c^{11}}$

41. $\sqrt{3n^3}$ **42.** $\sqrt{12x^4y^2}$ **43.** $\sqrt{75a^3b^2}$ **44.** $\sqrt{150m^4n^3}$

45. $\sqrt{300a^5b^{11}}$ **46.** $\sqrt{64xyz^5}$ **47.** $\sqrt{243x^3y^4}$ **48.** $\sqrt{500ab^4c^3}$

49. $\sqrt{108a^2b^7c}$ **50.** $\sqrt{112x^6y^8}$ **51.** $\sqrt{180r^3s^4t^5}$ **52.** $\sqrt{98x^4y^4z}$

Actividad en grupo

Aprendimos que $\sqrt{\square} = \square^{1/2}$. *Por ejemplo,* $\sqrt{x^6} = (x^6)^{1/2} = x^3$. *Podemos simplificar* $\sqrt{x^{2n}}$ *escribiendo la expresión en forma exponencial,* $\sqrt{x^{2n}} = (x^{2n})^{1/2} = x^{(2n)(1/2)} = x^n$. *En grupo, simplifiquen las siguientes raíces cuadradas escribiendo la expresión en forma exponencial. Muestren todos los pasos en el proceso de simplificación.*

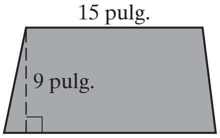
98. $\sqrt{x^{10a}}$ **99.** $\sqrt{x^{8b}}$ **100.** $\sqrt{x^{4a}y^{12b}}$ **101.** $\sqrt{x^{8b}y^{6c}}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.1] **102.** ***Área*** Determine el área del trapecio.

Utilice $A = \frac{1}{2}h(b + B)$.

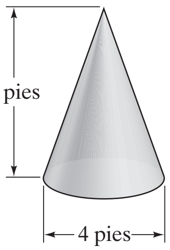
15 pulg.



18 pulg.

103. ***Volumen*** Determine el volumen del cono.

Utilice $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



[6.2] **104.** Divida $\dfrac{3x^2 - 16x - 12}{3x^2 - 10x - 8} \div \dfrac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 4}$.

[7.4] **105.** Escriba la ecuación $3x + 6y = 9$ en la forma pendiente-ordenada al origen e indique la pendiente y la intersección con y.

[7.5] **106.** Grafique $6x - 5y \geq 30$.

[8.3] **107.** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$3x - 4y = 6$$
$$5x - 3y = 5$$

9.3 SUMA, RESTA Y MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS

1 Sumar y restar raíces cuadradas.
2 Multiplicar raíces cuadradas.

1 Sumar y restar raíces cuadradas

Raíces cuadradas semejantes son raíces cuadradas que tienen los mismos radicandos. Las raíces cuadradas semejantes se suman de forma muy parecida como se suman los términos semejantes; a continuación ilustramos cómo.

Ejemplos de sumas de términos semejantes

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$$
$$4x + x = 4x + 1x = (4 + 1)x = 5x$$

Ejemplos de sumas de raíces cuadradas semejantes

$$2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2 + 3)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$
$$6\sqrt{x} + \sqrt{x} = 6\sqrt{x} + 1\sqrt{x} = (6 + 1)\sqrt{x} = 7\sqrt{x}$$

Observe que la suma de raíces cuadradas semejantes es una aplicación de la propiedad distributiva.

$$2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2 + 3)\sqrt{7}$$
$$= 5\sqrt{7}$$

Otros ejemplos de suma y resta de raíces cuadradas semejantes

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (2 - 3)\sqrt{5} = -1\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x} = 1\sqrt{x} + 1\sqrt{x} = (1 + 1)\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$
$$6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = (6 + 3 - 1)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1\sqrt{3}}{5} = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{3} = \frac{3}{5}\sqrt{3} \text{ o bien } \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

EJEMPLO 1 Simplifique, si es posible.

a) $4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 6$ **b)** $\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 4$

c) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{y} - 2\sqrt{3} - 6\sqrt{y}$ **d)** $2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

Solución

a) $4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 6 = (4 + 3)\sqrt{5} - 6$ *Sólo $4\sqrt{5}$ y $3\sqrt{5}$ pueden reducirse.*

$= 7\sqrt{5} - 6$ *Simplificar.*

b) $\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 4 = (1 - 4)\sqrt{6} + 4 = -3\sqrt{6} + 4$

c) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{y} - 2\sqrt{3} - 6\sqrt{y} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{y} - 6\sqrt{y}$ *Reunir los radicales semejantes.*

$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{y}$ *Simplificar.*

d) No pueden simplificarse ya que los radicandos son diferentes.

Las respuestas en el ejemplo 1 podrían escribirse de forma diferente. Por ejemplo, la respuesta del inciso **a)** podría escribirse como $-6 + 7\sqrt{5}$ por la propiedad conmutativa de la suma.

EJEMPLO 2 Simplifique.

a) $3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$ **b)** $2\sqrt{a} + a + 4\sqrt{a}$

c) $x + \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3$ **d)** $x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + x$

e) $\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} - \sqrt{x}$

Solución

a) $3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5\sqrt{x} = (3 - 4 + 5)\sqrt{x}$ *Los tres términos son radicales semejantes.*

$= 4\sqrt{x}$

b) $2\sqrt{a} + a + 4\sqrt{a} = a + 2\sqrt{a} + 4\sqrt{a}$ *Reunir los radicales semejantes.*

$= a + 6\sqrt{a}$ *Simplificar.*

c) $x + \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3 = x + 1\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3$ *$\sqrt{x}$ significa $1\sqrt{x}$.*

$= x + 3\sqrt{x} + 3$ *Sumar $1\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ para obtener $3\sqrt{x}$.*

d) $x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + x = (x + 3)\sqrt{x} + x$ *Sólo $x\sqrt{x}$ y $3\sqrt{x}$ pueden reducirse.*

e) $\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} = 3\sqrt{xy} - \sqrt{x}$ *Sólo $\sqrt{xy}$ y $2\sqrt{xy}$ pueden reducirse.*

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 19

Raíces cuadradas no semejantes son aquellas que tienen radicandos diferentes. En ocasiones es posible cambiar raíces cuadradas no semejantes en raíces cuadradas semejantes, por medio de la simplificación de radicales en la expresión. Después de simplificar, si los términos tienen el mismo radicando pueden reducirse. De otra forma, no pueden reducirse. Los ejemplos 3, 4 y 5 ilustran esto.

EJEMPLO 3 Simplifique $\sqrt{3} + \sqrt{12}$.

Solución Como 12 tiene un cuadrado perfecto, 4, escribimos 12 como un producto del cuadrado perfecto y otro factor.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + \sqrt{12} &= \sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} && \textit{Regla del producto.} \\ &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} && \textit{Ahora los términos son semejantes.} \\ &= 3\sqrt{3} && \textit{Sumar las raíces cuadradas.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Simplifique $\sqrt{63} - \sqrt{28}$.

Solución Escriba cada radicando como el producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.

$$\begin{aligned} \sqrt{63} - \sqrt{28} &= \sqrt{9 \cdot 7} - \sqrt{4 \cdot 7} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} && \textit{Regla del producto.} \\ &= 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} && \textit{Ahora los términos son semejantes.} \\ &= \sqrt{7} && \textit{Restar las raíces cuadradas.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Simplifique. **a)** $2\sqrt{8} - \sqrt{32}$ **b)** $3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} + 2$ **c)** $\sqrt{120} - \sqrt{75}$

Solución En cada inciso empezamos escribiendo cada raíz cuadrada como un producto de su mayor factor cuadrado perfecto, y otro factor. Luego simplificamos el factor cuadrado perfecto.

a)
$$\begin{aligned} 2\sqrt{8} - \sqrt{32} &= 2\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{16}\sqrt{2} && \textit{Regla del producto.} \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} && \textit{Simplificar los factores cuadrados perfectos.} \\ &= 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} && \textit{Simplificar.} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} + 2 &= 3\sqrt{4 \cdot 3} + 5\sqrt{9 \cdot 3} + 2 \\ &= 3\sqrt{4}\sqrt{3} + 5\sqrt{9}\sqrt{3} + 2 && \textit{Regla del producto.} \\ &= 3 \cdot 2\sqrt{3} + 5 \cdot 3\sqrt{3} + 2 && \textit{Simplif. los fact. cuad. perfec.} \\ &= 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 2 && \textit{Simplificar.} \\ &= 21\sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \sqrt{120} - \sqrt{75} &= \sqrt{4 \cdot 30} - \sqrt{25 \cdot 3} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{30} - \sqrt{25}\sqrt{3} && \textit{Regla del producto.} \\ &= 2\sqrt{30} - 5\sqrt{3} && \textit{Simplificar los factores cuadrados perfectos.} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 27

Como 30 no tiene factores que sean cuadrados perfectos y ya que los radicandos son diferentes, la expresión $2\sqrt{30} - 5\sqrt{3}$ no puede simplificarse más.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

La regla del producto que presentamos en la sección 9.2 fue $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$. El mismo principio **no aplica a** la suma.

INCORRECTO

$$\cancel{\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}}$$

Por ejemplo, para evaluar $\sqrt{9} + \sqrt{16}$,

CORRECTO	INCORRECTO
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4$	$\cancel{\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9 + 16}}$
$= 7$	$\cancel{= \sqrt{25}}$
	$\cancel{= 5}$

2 Multiplicar raíces cuadradas

Ahora analicemos la multiplicación de raíces cuadradas. Anteriormente introdujimos la regla del producto para radicales. Ahora la extenderemos a la multiplicación de expresiones radicales.

Se puede utilizar la propiedad distributiva para multiplicar expresiones radicales. Cuando la utilizamos, cada término dentro del paréntesis se multiplica por el término que precede al paréntesis. A continuación mostramos algunos ejemplos.

$$\sqrt{6}(\sqrt{6}+3) = (\sqrt{6})(\sqrt{6}) + (\sqrt{6})(3) = 6 + 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{x}+y) = (\sqrt{5})(\sqrt{x}) + (\sqrt{5})(y) = \sqrt{5x} + y\sqrt{5}$$

Ahora resolveremos un ejemplo.

EJEMPLO 6 Multiplique **a)** $\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)$ **b)** $\sqrt{2x}(\sqrt{x}+\sqrt{2y})$

Solución **a)** Utilice la propiedad distributiva. Esto da

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}(\sqrt{6}-2) &= (\sqrt{3})(\sqrt{6}) - (\sqrt{3})(2) \\
&= \sqrt{18} - 2\sqrt{3} && \textit{Regla del producto.} \\
&= \sqrt{9\cdot 2} - 2\sqrt{3} \\
&= \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} - 2\sqrt{3} && \textit{Regla del producto.} \\
&= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x}(\sqrt{x}+\sqrt{2y}) &= (\sqrt{2x})(\sqrt{x}) + (\sqrt{2x})(\sqrt{2y}) \\
&= \sqrt{2x^2} + \sqrt{4xy} && \textit{Regla del producto.} \\
&= \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{4}\cdot\sqrt{xy} && \textit{Regla del producto.} \\
&= x\sqrt{2} + 2\sqrt{xy}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 41

Para multiplicar dos binomios con términos con raíces cuadradas, cada término en el primer binomio debe multiplicarse por cada término del segundo binomio, utilizando el método PIES.

EJEMPLO 7 Multiplique $(3+\sqrt{5})(4-2\sqrt{5})$ por medio del método PIES.

Solución

P S I E

$$\begin{aligned}
(3+\sqrt{5})(4-2\sqrt{5}) &= \overset{P}{3(4)} + \overset{I}{4\sqrt{5}} + \overset{E}{3(-2\sqrt{5})} + \overset{L}{\sqrt{5}(-2\sqrt{5})} \\
&= 12 \underbrace{+ 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5}} - 2\sqrt{25} \\
&= 12 - 2\sqrt{5} - 2(5) \\
&= 12 - 2\sqrt{5} - 10 \\
&= 2 - 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 55

EJEMPLO 8 Multiplique por medio del método PIES.

a) $(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})$ **b)** $(x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})$

Solución **a)**

P S I E

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) &= \overset{P}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + \overset{I}{(-\sqrt{7})(\sqrt{2})} + \overset{E}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}} + \overset{S}{(-\sqrt{7})(\sqrt{7})} \\
&= \sqrt{4} - \sqrt{14} + \sqrt{14} - \sqrt{49} \\
&= \sqrt{4} - \sqrt{49} \\
&= 2 - 7 = -5
\end{aligned}$$

b) $(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y}) = (x)(x) + (-\sqrt{y})(x) + x(\sqrt{y}) + (-\sqrt{y})(\sqrt{y})$
$= x^2 - x\sqrt{y} + x\sqrt{y} - \sqrt{y^2}$
$= x^2 - \sqrt{y^2}$
$= x^2 - y$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 73

Observe que ambas partes del ejemplo 8 pueden considerarse como el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos. En la sección 4.5 aprendimos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. En el inciso **a)** si hacemos $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{7}$, entonces

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2 = 2 - 7 = -5.$$

En el inciso **b)**, si hacemos $a = x$ y $b = \sqrt{y}$, entonces

$$a^2 - b^2 = (x)^2 - (\sqrt{y})^2 = x^2 - y.$$

Ambas respuestas coinciden con las que se obtuvieron en el ejemplo 8.

Conjunto de ejercicios 9.3

Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué son raíces cuadradas semejantes? Proporcione un ejemplo.
2. ¿Qué son raíces cuadradas no semejantes? Proporcione un ejemplo.
3. ¿En qué condiciones dos raíces cuadradas pueden sumarse o restarse?
4. Explique cómo sumar raíces cuadradas semejantes.

Práctica de habilidades

Simplifique cada expresión.

5. $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$
6. $8\sqrt{3} + \sqrt{3}$
7. $7\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$
8. $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - \sqrt{7} + 4$
9. $\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 6$
10. $10\sqrt{13} - 6\sqrt{13} + 5\sqrt{13}$
11. $5\sqrt{x} + \sqrt{x}$
12. $4\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$
13. $-\sqrt{y} + 3\sqrt{y} - 5\sqrt{y}$
14. $3\sqrt{y} - 6\sqrt{y} + 2$
15. $-6\sqrt{t} + 2\sqrt{t} - 6$
16. $3\sqrt{5} - \sqrt{x} + 4\sqrt{5} + 3\sqrt{x}$
17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + x + 3\sqrt{y}$
18. $3 + 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$
19. $4 + 4\sqrt{m} - 6\sqrt{m} + 5m - 2$
20. $2\sqrt{p} - 3p - 5\sqrt{p} + 2\sqrt{p}$
21. $-3\sqrt{7} + \sqrt{7} - 2\sqrt{x} - 7\sqrt{x}$
22. $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{y} - 5\sqrt{y}$

Simplifique cada expresión.

23. $\sqrt{20} + \sqrt{18}$
24. $\sqrt{8} - \sqrt{12}$
25. $\sqrt{300} - \sqrt{27}$
26. $\sqrt{125} + \sqrt{20}$
27. $\sqrt{75} + \sqrt{108}$
28. $\sqrt{15} - \sqrt{135}$
29. $4\sqrt{50} - \sqrt{72} + \sqrt{8}$
30. $-4\sqrt{99} + 3\sqrt{44} + 2\sqrt{11}$
31. $-3\sqrt{125} + 7\sqrt{75}$
32. $5\sqrt{40} - \sqrt{50}$
33. $2\sqrt{360} + 4\sqrt{160}$
34. $6\sqrt{180} - 7\sqrt{108}$
35. $4\sqrt{16} - \sqrt{48}$
36. $3\sqrt{250} + 5\sqrt{160}$

Multiplique.

37. $\sqrt{3}(4 + \sqrt{3})$
38. $\sqrt{2}(6 + \sqrt{2})$
39. $4(\sqrt{x} - \sqrt{2})$
40. $3(\sqrt{5} - \sqrt{x})$
41. $y(\sqrt{y} + y)$
42. $z(z - \sqrt{z})$
43. $\sqrt{5}(\sqrt{8} - 2)$
44. $\sqrt{6}(4 + \sqrt{8})$
45. $\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{3})$
46. $\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{2})$
47. $\sqrt{a}(6 - \sqrt{2a})$
48. $\sqrt{d}(5 + \sqrt{2d})$
49. $x(x + 4\sqrt{y})$
50. $x(2x - 3\sqrt{y})$
51. $3x(4x - 3\sqrt{x})$
52. $5y(y + \sqrt{y})$

En la sección 5.6, por medio de factorización, resolvimos ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. *No todas las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse por medio de factorización. En el capítulo 10 introduciremos otra forma de resolver ecuaciones cuadráticas, denominada* **fórmula cuadrática**. *La expresión* $\sqrt{b^2 - 4ac}$ *es parte de la fórmula cuadrática. Evalúe esta expresión para las siguientes ecuaciones cuadráticas Por ejemplo, observe en la ecuación cuadrática* $2x^2 - 4x - 5 = 0$ *que* $a = 2$, $b = -4$ *y* $c = -5$ (*a* y *b* *son los coeficientes del término cuadrático y del término lineal, respectivamente, y c es el término constante*).

93. $x^2 + 3x + 2 = 0$

94. $x^2 + 9x + 20 = 0$

95. $x^2 - 14x - 5 = 0$

96. $x^2 + 4x - 1 = 0$

97. $-2x^2 + 4x + 7 = 0$

98. $-6x^2 - 2x + 1 = 0$

Problemas de reto

En los ejercicios 99 y 100, llene el área sombreada para hacer que cada enunciado sea verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

99. $-5\sqrt{\square} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} = -9\sqrt{3}$

100. $20\sqrt{2} - 4\sqrt{\square} + 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.5] **101.** ***Paseo en trineo*** Al deslizarse colina abajo, Jason promedia 10 millas por hora. Subiendo la misma colina hacia donde comenzó, él promedia 2 millas por hora. Si le toma 0.2 horas más subir la colina que descender por ella, ¿cuánto tiempo estuvo descendiendo?

[5.4] **102.** Factorice $3x^2 - 12x - 96$.

[6.1] **103.** Simplifique $\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

[6.6] **104.** Resuelva la ecuación $x + \dfrac{24}{x} = 10$.

[8.1] **105.** Mediante el método gráfico, resuelva el siguientes sistema de ecuaciones.

$$y = 2x - 2$$
$$2x + 3y = 10$$

9.4 DIVISIÓN DE RAÍCES CUADRADAS

1 Entender lo que significa que una raíz cuadrada esté simplificada.
2 Usar la regla del cociente para simplificar raíces cuadradas.
3 Racionalizar denominadores.
4 Racionalizar un denominador que tiene un binomio.

1 Entender lo que significa que una raíz cuadrada esté simplificada

En esta sección utilizaremos una regla nueva, la del cociente, para simplificar raíces cuadradas que tengan fracciones. Antes de hacerlo, analicemos lo que significa que una raíz cuadrada esté simplificada.

Una raíz cuadrada está simplificada cuando

1. Ningún radicando tiene un factor que sea cuadrado perfecto.
2. Ningún radicando tiene una fracción.
3. Ningún denominador tiene una raíz cuadrada.

Los tres criterios deben cumplirse para que una expresión esté simplificada. Veamos algunas expresiones que *no están simplificadas*.

Radical	Razón por la que no está simplificada	
$\sqrt{8}$	Tiene un factor cuadrado perfecto, 4. $(\sqrt{8} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2})$	(Criterio 1)
$\sqrt{x^3}$	Tiene un factor cuadrado perfecto, x^2. $\left(\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x}\right)$	(Criterio 1)
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	El radicando tiene una fracción.	(Criterio 2)
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	La raíz cuadrada en el denominador.	(Criterio 3)

Antes de estudiar el procedimiento para dividir y simplificar raíces cuadradas que tienen fracciones, necesitamos entender cuándo se pueden dividir los factores comunes y cuándo no.

Los factores comunes en el numerador y en el denominador de una fracción dentro del signo de radical *pueden* dividirse. Por ejemplo, lo que se muestra a continuación es correcto.

$$\sqrt{\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{\overset{x}{\cancel{x^3}}}{\underset{1}{\cancel{x^2}}}} = \sqrt{\frac{x}{1}} = \sqrt{x}$$

Sin embargo, no podemos dividir los factores comunes, si una expresión que tiene el factor común está dentro de un radical y la otra expresión no. Véase el siguiente error común.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Una expresión dentro de la raíz cuadrada *no puede* dividirse entre una expresión que no esté dentro de la raíz cuadrada.

CORRECTO	INCORRECTO
$\frac{\sqrt{6}}{3}$ no puede simplificarse más.	~~$\frac{\sqrt{\overset{2}{\cancel{6}}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \sqrt{2}$~~
$\frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\,\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{x}$	~~$\frac{\sqrt{\overset{2}{\cancel{x^3}}}}{\underset{1}{\cancel{x}}} = \sqrt{x^2} = x$~~

Cada una de las siguientes simplificaciones es correcta, ya que la constante o variable que dividimos no está dentro de las raíces cuadradas.

CORRECTO	CORRECTO
$\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2\sqrt{2}$	$\frac{\cancel{x}\sqrt{2}}{\cancel{x}} = \sqrt{2}$
$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\overset{x}{\cancel{x^2}}\sqrt{5}}{\cancel{x}} = 3x\sqrt{5}$

Ahora analizaremos la regla del cociente.

2 Usar la regla del cociente para simplificar raíces cuadradas

La regla del cociente para raíces cuadradas establece que el cociente de dos raíces cuadradas es igual a la raíz cuadrada del cociente de los radicandos.

Regla del cociente para raíces cuadradas

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{siempre que} \quad a \geq 0, b > 0 \qquad \text{Regla 3}$$

Los ejemplos 1 a 4 ilustran cómo utilizamos la regla del cociente para simplificar raíces cuadradas.

EJEMPLO 1 Simplifique. **a)** $\sqrt{\frac{25}{5}}$ **b)** $\sqrt{\frac{64}{4}}$ **c)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$

Solución Cuando la raíz cuadrada tenga una fracción, divida tanto el numerador como el denominador entre los factores comunes. Si la raíz cuadrada aún tiene una fracción, utilice la regla del cociente para simplificar.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 13

a) $\sqrt{\frac{25}{5}} = \sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$ **c)** $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

EJEMPLO 2 Simplifique. **a)** $\sqrt{\frac{8x^2}{4}}$ **b)** $\sqrt{\frac{160a^2b}{4b}}$ **c)** $\sqrt{\frac{3x^2y^4}{27x^4}}$ **d)** $\sqrt{\frac{15ab^5c^2}{3a^5bc}}$

Solución Primero divida entre los factores comunes tanto el numerador como el denominador; luego simplifique.

a)
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8x^2}{4}} &= \sqrt{2x^2} && \textit{Simplificar el radicando.} \\ &= \sqrt{x^2}\,\sqrt{2} && \textit{Regla del producto.} \\ &= x\sqrt{2} && \textit{Simplificar.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{160a^2b}{4b}} &= \sqrt{40a^2} && \textit{Simplificar el radical.} \\ &= \sqrt{4a^2}\,\sqrt{10} && \textit{Regla del producto.} \\ &= 2a\sqrt{10} && \textit{Simplificar.} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3x^2y^4}{27x^4}} &= \sqrt{\frac{y^4}{9x^2}} && \textit{Simplificar el radicando.} \\ &= \frac{\sqrt{y^4}}{\sqrt{9x^2}} && \textit{Regla del cociente.} \\ &= \frac{y^2}{3x} && \textit{Simplificar.} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 27

d) $\sqrt{\frac{15ab^5c^2}{3a^5bc}} = \sqrt{\frac{5b^4c}{a^4}} = \frac{\sqrt{5b^4c}}{\sqrt{a^4}} = \frac{\sqrt{b^4}\,\sqrt{5c}}{\sqrt{a^4}} = \frac{b^2\sqrt{5c}}{a^2}$

Cuando le den una fracción que tenga una expresión radical tanto en el numerador como en el denominador, utilice la regla del cociente para simplificar, como en los ejemplos 3 y 4.

EJEMPLO 3 Simplifique. **a)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Solución **a)**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} \qquad \textit{Regla del cociente.}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} \qquad \textit{Simplificar el radicando.}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} \qquad \textit{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad \textit{Simplificar.}$$

b)

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

Ahora resolveremos otro ejemplo.

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\dfrac{\sqrt{32x^4y^3}}{\sqrt{8xy}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{75x^8y^4}}{\sqrt{3x^5y^8}}$

Solución **a)**

$$\frac{\sqrt{32x^4y^3}}{\sqrt{8xy}} = \sqrt{\frac{32x^4y^3}{8xy}} \qquad \textit{Regla del cociente.}$$

$$= \sqrt{4x^3y^2} \qquad \textit{Simplificar el radical.}$$

$$= \sqrt{4x^2y^2}\,\sqrt{x} \qquad \textit{Regla del producto.}$$

$$= 2xy\sqrt{x} \qquad \textit{Simplificar.}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 31

b)

$$\frac{\sqrt{75x^8y^4}}{\sqrt{3x^5y^8}} = \sqrt{\frac{75x^8y^4}{3x^5y^8}} = \sqrt{\frac{25x^3}{y^4}} = \frac{\sqrt{25x^3}}{\sqrt{y^4}} = \frac{\sqrt{25x^2}\,\sqrt{x}}{\sqrt{y^4}} = \frac{5x\sqrt{x}}{y^2}$$

Si observa todas las respuestas de los ejemplos 1 a 4, notará que todas cumplen con los tres criterios necesarios para que una raíz cuadrada sea simplificada.

3 Racionalizar denominadores

Suponga que le piden simplificar expresiones como $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ o $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$. ¿Cómo lo haría? Para simplificar expresiones utilizamos un proceso llamado **racionalización del denominador. Racionalizar un denominador significa eliminar todos los radicales de él.** Racionalizamos el denominador porque es más sencillo (sin una calculadora) obtener un valor aproximado de un número como $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ que un número como $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Además, en ocasiones podría ser necesario racionalizar los denominadores para sumar o restar expresiones con radicales. Cuando el denominador de una fracción tiene la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto, por lo general simplificamos la expresión por medio de la **racionalización del denominador.**

> **Para racionalizar un denominador que tiene una raíz cuadrada,** multiplicamos *tanto* el numerador *como* el denominador de la fracción por la raíz cuadrada que aparece en el denominador o por la raíz cuadrada del número que haga al denominador un cuadrado perfecto.

EJEMPLO 5 Simplifique $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución Como $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La respuesta $\frac{\sqrt{3}}{3}$ está simplificada porque satisface los tres requisitos establecidos con anterioridad.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 39

En el ejemplo 5, multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$ es equivalente a multiplicar la fracción por 1, lo cual no cambia su valor.

EJEMPLO 6 Simplifique. **a)** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **b)** $\sqrt{\frac{z^2}{18}}$

Solución **a)**

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad \textit{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \qquad \textit{Multiplicar numerador y denominador por } \sqrt{3}.$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} \qquad \textit{Regla del producto.}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \textit{Simplificar.}$$

b) $$\sqrt{\frac{z^2}{18}} = \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{18}} = \frac{z}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{z}{3\sqrt{2}}$$

Ahora racionalice el denominador.

$$\frac{z}{3\sqrt{2}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{z\sqrt{2}}{3\sqrt{4}} = \frac{z\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{z\sqrt{2}}{6}$$

El inciso **b)** también puede racionalizarse como sigue:

$$\sqrt{\frac{z^2}{18}} = \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{18}} = \frac{z}{\sqrt{18}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{36}} = \frac{z\sqrt{2}}{6}$$

Observe que $\frac{z}{\sqrt{18}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}}}$ también nos daría el mismo resultado, después de simplificar.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 63

Ahora analizaremos la racionalización de un denominador en donde éste es un binomio que tiene una o más expresiones con radicales.

4 Racionalizar un denominador que tiene un binomio

Cuando el denominador de una expresión racional es un binomio con un término con raíz cuadrada, nuevamente **racionalizamos el denominador**. Hacemos esto multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador. El **conjugado de un binomio** es un binomio que tiene los mismos dos términos con el signo del segundo término cambiado.

Binomio	Su conjugado
$5+\sqrt{2}$	$5-\sqrt{2}$
$\sqrt{3}-4$	$\sqrt{3}+4$
$2\sqrt{3}-\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}+\sqrt{5}$
$-x+\sqrt{3}$	$-x-\sqrt{3}$

Cuando un binomio se multiplica por su conjugado utilizando el método PIES, la suma de los términos externos e internos será cero.

Ahora resolveremos algunos ejemplos en donde racionalizamos el denominador, cuando éste es un binomio con uno o más términos con radicales.

EJEMPLO 7 Simplifique $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}}$.

Solución Para racionalizar el denominador, multiplique el numerador y el denominador de la fracción por $2-\sqrt{3}$, que es el conjugado de $2+\sqrt{3}$.

$$\frac{5}{2+\sqrt{3}}\cdot\boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\frac{5(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$ *Multiplicar el numerador y el denominador por $2-\sqrt{3}$.*

$$=\frac{5(2-\sqrt{3})}{4-3}$$ *Multiplicar los factores en el denominador, como se estudió en la sección 9.3.*

$$=\frac{5(2-\sqrt{3})}{1}$$ *Simplificar.*

$$=5(2-\sqrt{3})=10-5\sqrt{3}$$

Observe que $-5\sqrt{3}+10$ también es una respuesta aceptable.

EJEMPLO 8 Simplifique $\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

Solución Multiplique el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt{2}+\sqrt{5}$, el conjugado de $\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

$$\frac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}}=\frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}$$ *Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.*

$$=\frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5}$$ *Multiplicar los factores en el denominador.*

$$=\frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{-3}$$ *Simplificar.*

$$=\frac{-\overset{2}{\cancel{6}}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\cancel{3}}$$

$$=-2(\sqrt{2}+\sqrt{5})=-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 87

EJEMPLO 9 Simplifique $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}}$.

Solución Multiplique numerador y denominador de la fracción por $2+\sqrt{6}$, el conjugado de $2-\sqrt{6}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}}\cdot\frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{6})}{4-6}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{6}}{-2} \qquad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{18}}{-2} \qquad \textit{Regla del producto.}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{9}\sqrt{2}}{-2} \qquad \textit{Regla del producto.}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-2} \qquad \textit{Simplificar.}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2} \qquad \textit{Multiplicar numerador y denominador por } -1.$$

EJEMPLO 10 Simplifique $\dfrac{x}{x-\sqrt{y}}$.

Solución Multiplique numerador y denominador de la fracción por $x+\sqrt{y}$, el conjugado del denominador.

$$\frac{x}{x-\sqrt{y}}\cdot\frac{x+\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}=\frac{x(x+\sqrt{y})}{x^2-y}=\frac{x^2+x\sqrt{y}}{x^2-y}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 93

Recuerde: no puede dividir los términos x^2, ya que no son factores.

Conjunto de ejercicios 9.4

Ejercicios conceptuales

En los ejercicios 1 a 6, indique si se puede dividir el numerador y el denominador de la fracción entre un factor común. Si se puede hacer, hágalo y muestre la respuesta simplificada. Vea el recuadro de Cómo evitar errores comunes, en la página 578.

1. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **2.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{2}$ **3.** $\dfrac{x^2\sqrt{2}}{x}$

4. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **5.** $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ **6.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

7. ¿Cuáles son los tres requisitos que deben considerarse para que una raíz cuadrada esté simplificada?

8. Establezca la regla del cociente para las raíces cuadradas y explique lo que esto significa.

9. Explique por qué cada expresión no está simplificada.

a) $\sqrt{27}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

10. ¿Qué significa racionalizar un denominador?

55. En el ejercicio 37 graficamos los montos resultantes en diferentes periodos después de invertir \$100 a 7% de interés simple y a 7% de interés capitalizable cada año.

a) Utilice la fórmula del interés compuesto dada en el ejemplo 5 para determinar el monto que se obtiene después de 10 años, por una inversión de \$100 a una tasa de 7% de interés capitalizable diariamente (suponga que cada año es de 365 días).

b) Calcule la diferencia entre el monto que se obtiene 10 años después de invertir \$100 a 7% de interés simple, y el monto que se obtiene transcurrido el mismo plazo al invertir \$100 a 7% de interés capitalizable diariamente.

56. Grafique $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en la misma ventana.

57. **a)** Grafique $y = 3^{x-5}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $4 = 3^{x-5}$. Redondee su respuesta al centésimo más cercano.

58. **a)** Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

Reto

59. Suponga que Bob Jenkins le da a Carol Dantuma \$1 en el día 1, \$2 en el día 2, \$4 en el día 3, \$8 en el día 4, y continúa duplicando la cantidad durante 30 días.

a) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 15.

b) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 20.

c) Usando la forma exponencial, exprese el monto que Bob le da a Carol el día n.

d) ¿Cuánto le dará Bob a Carol el día 30? Escriba la cantidad en forma exponencial. Luego utilice su calculadora para evaluar.

e) Exprese el monto total que Bob le da a Carol durante los 30 días, como una suma de términos exponenciales. (No determine el valor real.)

Actividad en grupo

60. Las funciones exponenciales o aproximadamente exponenciales son muy comunes.

a) Que cada miembro del grupo determine, de manera individual, una función que no haya sido dada en esta sección y que pueda aproximarse a una función exponencial. Pueden utilizar periódicos, libros y otras fuentes.

b) Analicen en grupo las funciones de todos los miembros. Determinen si cada función presentada es una función exponencial.

c) Escriban en grupo un ensayo en el que analicen cada una de las funciones y establezcan por qué creen que cada una de ellas es exponencial.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.1] **61.** Considere el polinomio

$$2.3x^4y - 6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2$$

a) Escriba el polinomio en orden descendente de la variable x.

b) ¿Cuál es el grado del polinomio?

c) ¿Cuál es su coeficiente principal?

[5.2] **62.** Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$, determine $(f \cdot g)(x)$.

[7.1] **63.** Escriba $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ como un valor absoluto.

[7.3] **64.** Simplifique $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5y^9}{2y^3z}}$.

9.3 Funciones logarítmicas

1 Convertir de forma exponencial a forma logarítmica.

2 Graficar funciones exponenciales.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas.

1 Convertir funciones de forma exponencial a forma logarítmica

Estamos preparados para hablar de **logaritmos**. Considere la función exponencial $y = 2^x$. Como se mencionó en la sección 9.1, para determinar la función inversa intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Al intercambiar x y y se obtiene la ecuación $x = 2^y$, pero no hay forma de despejar y en la ecuación $x = 2^y$. A continuación se presenta una nueva definición que nos ayudará a lograrlo.

Logaritmo

Para todos los números positivos a, donde $a \neq 1$,

$$\boldsymbol{y = \log_a x} \text{ significa } \boldsymbol{x = a^y}$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, $x = 2^y$ significa $y = \log_2 x$. Por lo tanto, podemos deducir que $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son funciones inversas. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

En la ecuación $y = \log_a x$, *log* es una abreviatura de la palabra *logaritmo*; $y = \log_a x$ se lee "y es el logaritmo de x en la base a". La letra y representa el logaritmo, la letra a la base, y la letra x el número.

$$\underset{\text{(exponente)}}{\overset{\text{logaritmo}}{y}} = \log_{\underset{\text{base}}{a}} \overset{\text{número}}{x} \qquad \text{significa} \qquad \underset{\text{número}}{x} = \underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{exponente}}{y}}$$

En otras palabras, el logaritmo del número x en la base a, es el *exponente* al cual debe elevarse ésta para obtener el número x. En resumen, *un logaritmo es un exponente*. Por ejemplo,

$$2 = \log_{10} 100 \text{ significa } 100 = 10^2$$

En $\log_{10} 100 = 2$, el logaritmo es 2, la base es 10 y el número es 100. El logaritmo, 2, es el *exponente* al que debe elevarse la base, 10, para obtener el número, 100. Observe que $10^2 = 100$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

Resolvamos algunos ejemplos que requieren la conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica, y viceversa.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

a) $3^4 = 81$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ **c)** $2^{-5} = \frac{1}{32}$

Solución

a) $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_{1/5} \frac{1}{125} = 3$ **c)** $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

EJEMPLO 2 ▸ Escriba cada ecuación en forma exponencial.

a) $\log_7 49 = 2$ **b)** $\log_4 64 = 3$ **c)** $\log_{1/3} \frac{1}{81} = 4$

Solución

a) $7^2 = 49$ **b)** $4^3 = 64$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 47**

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada ecuación en la forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

a) $y = \log_5 25$ **b)** $2 = \log_a 16$ **c)** $3 = \log_{1/2} x$

Solución

a) $5^y = 25$. Ya que $5^2 = 25$, $y = 2$.

b) $a^2 = 16$. Como $4^2 = 16$, $a = 4$. Observe que a debe ser mayor que 0, por lo que -4 no es un valor posible de a.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$. Ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{8}$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 65

2 Graficar funciones exponenciales

Ahora que sabemos cómo convertir ecuaciones de la forma exponencial a la forma logarítmica y viceversa, podemos graficar funciones logarítmicas. Las ecuaciones de la forma $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, se denominan **funciones logarítmicas**. Las gráficas de este tipo de funciones pasan la prueba de la recta vertical. Para graficarlas, cambie a la forma exponencial y trace los puntos. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 4 y 5.

Antes de graficar funciones logarítmicas, analizaremos algunas de sus características.

Gráficas de funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, a $\neq 1$ y $x > 0$:

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

En casi todos los casos puede trazarse una gráfica razonablemente buena de la función logarítmica, precisamente con los tres puntos que se listaron en el paso 3. Cuando $a > 1$, la gráfica se vuelve casi vertical a la izquierda de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ y casi horizontal a la derecha de $(a, 1)$, vea el ejemplo 4.

Cuando $0 < a < 1$, la gráfica parece casi vertical a la izquierda de $(a, 1)$, y casi horizontal a la derecha de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, vea el ejemplo 5.

EJEMPLO 4 ▶ Grafique $y = \log_2 x$. Indique el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = 2$; $y = \log_2 x$ significa $x = 2^y$. Por lo tanto, para empezar construimos la tabla de valores usando $x = 2^y$. La tabla se desarrollará con mayor facilidad para valores seleccionados de y y determinando los valores correspondientes de x. Los tres puntos listados en el paso 3 del recuadro aparecen en rojo en la tabla.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

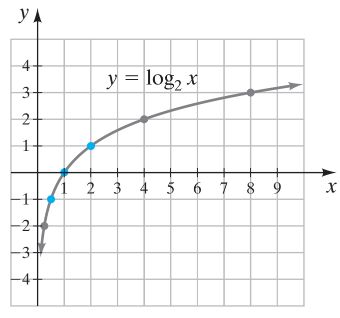


FIGURA 9.21

Después trazamos la gráfica (**figura 9.21**). Los tres pares ordenados que se resaltan en la tabla también se resaltan en rojo en la gráfica. El dominio, es decir, el conjunto de valores de x, es $\{x|x > 0\}$. El rango, o conjunto de valores de y, es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 5 Grafique $y = \log_{1/2} x$. Indique el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = \frac{1}{2}$. $y = \log_{1/2} x$ significa $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$. Primero construimos una tabla de valores seleccionando valores para y y determinando los correspondientes valores de x.

x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

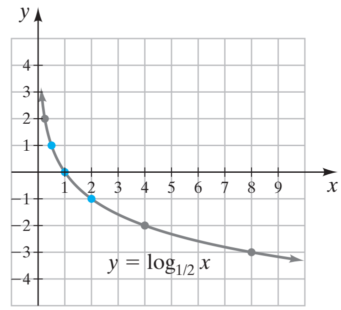


FIGURA 9.22

La gráfica se ilustra en la **figura 9.22**. El dominio es $\{x|x > 0\}$ y el rango es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Ahora resuelva el ejercicio 13

Si analizamos los ejemplos 4 y 5, veremos que el dominios de $y = \log_2 x$ y de $y = \log_{1/2} x$ es $\{x|x > 0\}$. De hecho, **para cualquier función logarítmica $y = \log_a x$, el dominio es $\{x|x > 0\}$**. Observe también que las gráficas de los ejemplos 4 y 5 son gráficas de funciones uno a uno.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

Recuerde que para determinar las funciones inversas, intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Considere $y = a^x$. Si intercambiamos x y y, obtenemos $x = a^y$. De acuerdo con la definición de logaritmo, podemos reescribir esta función como $y = \log_a x$, que es una ecuación donde y está despejada. Por consiguiente, $y = a^x$ *y* $y = \log_a x$ *son funciones inversas*, y podemos escribir: si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$.

En la **figura 9.23** se muestran las gráficas generales de $y = a^x$ y de $y = \log_a x, a > 1$ en los mismos ejes. Observe que son simétricas respecto de la recta $y = x$. Tome en cuenta la información del recuadro siguiente.

Características de las gráficas

	FUNCIÓN EXPONENCIAL		FUNCIÓN LOGARÍTMICA
	$y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$		$y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$		$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$		$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$	*x se transforma en y, y se transforma en x*	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

Con base en lo anterior, podemos ver que el rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica, y viceversa. Además, los valores de x y de y en los pares ordenados están intercambiados en las funciones exponencial y logarítmica.

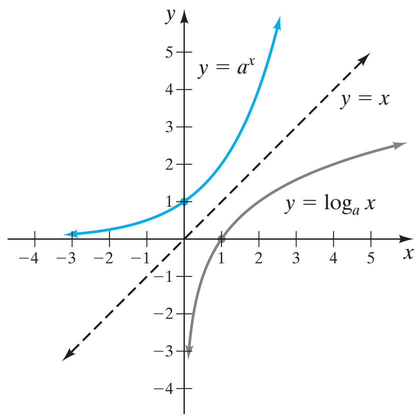


FIGURA 9.23

En la **figura 9.24** se ilustran las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$. En la **figura 9.25** se muestran las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$. En cada figura, las gráficas son inversas entre sí y, por lo tanto, simétricas respecto de la recta $y = x$.

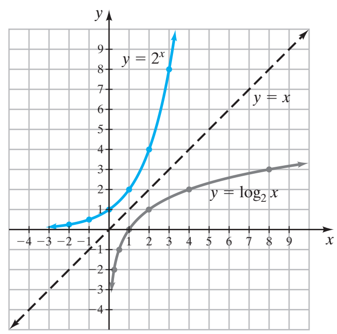


FIGURA 9.24

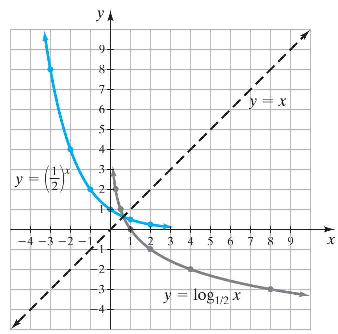


FIGURA 9.25

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas

Más adelante veremos muchos problemas de aplicación que involucran logaritmos; por lo pronto analizaremos sólo una de sus aplicaciones más importantes.

EJEMPLO 6 ▸ Terremotos Los logaritmos se utilizan para medir la magnitud de los terremotos. En la escala Richter, desarrollada por el sismólogo Charles F. Richter, por ejemplo, la magnitud, R, de un terremoto está dada por la fórmula

$$R = \log_{10} I$$

donde I representa el número de veces que el terremoto es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con un sismógrafo.

a) Si un terremoto mide 4 grados en la escala de Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5 grados que uno que mide 4?

Solución **a)** Entienda el problema El número asignado en la escala Richter, R, es 4. Para determinar cuántas veces es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse, I, sustituimos $R = 4$ en la fórmula y despejamos I.

Traduzca

$$R = \log_{10} I$$
$$4 = \log_{10} I$$

Realice los cálculos

$$10^4 = I \quad \text{Cambiar a la forma exponencial.}$$
$$10{,}000 = I$$

Responda Por lo tanto, un terremoto que mide 4 grados es 10,000 veces más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir.

b)

$$5 = \log_{10} I$$
$$10^5 = I \quad \text{Cambiar a la forma exponencial.}$$
$$100{,}000 = I$$

Como (10,000)(10) = 100,000, un terremoto que mide 5 es 10 veces más intenso que un terremoto que mide 4.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 113

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Considere la función logarítmica $y = \log_a x$.
   a) ¿Qué restricciones hay sobre a?
   b) ¿Cuál es el dominio de la función?
   c) ¿Cuál es el rango de la función?
2. Escriba $y = \log_a x$ en forma exponencial.
3. Si algunos puntos en la gráfica de la función exponencial, $f(x) = a^x$ son $\left(-3, \frac{1}{27}\right), \left(-2, \frac{1}{9}\right), \left(-1, \frac{1}{3}\right)$, (0, 1), (1, 3), (2, 9) y (3, 27), liste algunos puntos de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$. Explique cómo determinó su respuesta.
4. Para la función logarítmica $y = \log_a (x - 3)$, ¿qué debe cumplirse respecto de x? Explique.
5. Analice la relación entre las gráficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$ para $a > 0$ y $a \neq 1$.
6. ¿Cuál es la intersección con el eje x de la gráfica de una ecuación de la forma $y = \log_a x$?

Práctica de habilidades

Grafique las funciones logarítmicas.

7. $y = \log_2 x$
8. $y = \log_3 x$
9. $y = \log_{1/2} x$
10. $y = \log_{1/3} x$
11. $y = \log_5 x$
12. $y = \log_4 x$
13. $y = \log_{1/5} x$
14. $y = \log_{1/4} x$

Grafique cada par de funciones en los mismos ejes.

15. $y = 2^x, y = \log_{1/2} x$
16. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_2 x$
17. $y = 2^x, y = \log_2 x$
18. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_{1/2} x$

Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

19. $2^3 = 8$
20. $3^5 = 243$
21. $3^2 = 9$
22. $2^6 = 64$
23. $16^{1/2} = 4$
24. $49^{1/2} = 7$
25. $8^{1/3} = 2$
26. $16^{1/4} = 2$
27. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
28. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
29. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
30. $6^{-3} = \frac{1}{216}$
31. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
32. $81^{1/2} = 9$
33. $64^{1/3} = 4$
34. $5^{-4} = \frac{1}{625}$
35. $8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
36. $16^{-1/2} = \frac{1}{4}$
37. $81^{-1/4} = \frac{1}{3}$
38. $32^{-1/5} = \frac{1}{2}$
39. $10^{0.8451} = 7$
40. $10^{1.0792} = 12$
41. $e^2 = 7.3891$
42. $e^{-1/2} = 0.6065$
43. $a^n = b$
44. $c^b = w$

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.4–5.7] *Factorice*.

119. $2x^3 - 6x^2 - 36x$ **120.** $x^4 - 16$ **121.** $40x^2 + 52x - 12$ **122.** $6r^2s^2 + rs - 1$

9.4 Propiedades de los logaritmos

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos.

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos.

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos.

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos

Al determinar el logaritmo de una expresión, a ésta se le denomina **argumento** del logaritmo. Por ejemplo, en $\log_{10} 3$, el 3 es el argumento; en $\log_{10}(2x + 4)$, el $(2x + 4)$ es el argumento. Cuando el argumento contiene una variable, suponemos que representa un valor positivo. *Recuerde que sólo existen logaritmos de números positivos*.

Para poder realizar cálculos mediante logaritmos, primero hay que entender sus propiedades. La primera de estas propiedades que estudiaremos es la regla del producto para logaritmos.

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos, x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \textbf{Propiedad 1}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Para demostrar esta propiedad, determinemos $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$. Recuerde que los logaritmos son exponentes. A continuación escribimos cada logaritmo en forma exponencial.

$$\log_a x = m \text{ significa } a^m = x$$
$$\log_a y = n \text{ significa } a^n = y$$

Al sustituir y usar las reglas de los exponentes, vemos que

$$xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ahora podemos convertir $xy = a^{m+n}$ a la forma logarítmica.

$$xy = a^{m+n} \text{ significa } \log_a xy = m + n$$

Por último, al sustituir m por $\log_a x$ y n por $\log_a y$, obtenemos

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

que es la propiedad 1.

Ejemplos de la propiedad 1

$$\log_3(6 \cdot 7) = \log_3 6 + \log_3 7$$
$$\log_4 3z = \log_4 3 + \log_4 z$$
$$\log_8 x^2 = \log_8(x \cdot x) = \log_8 x + \log_8 x \quad \text{o} \quad 2\log_8 x$$

La propiedad 1, la regla del producto, puede extenderse a tres o más factores, por ejemplo, $\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos

Analicemos ahora la regla del cociente para logaritmos, a la que haremos referencia como propiedad 2.

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \textbf{Propiedad 2}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del numerador y del denominador.

Ejemplos de la propiedad 2

$$\log_3 \frac{19}{4} = \log_3 19 - \log_3 4$$

$$\log_6 \frac{x}{3} = \log_6 x - \log_6 3$$

$$\log_5 \frac{z}{z+2} = \log_5 z - \log_5 (z+2)$$

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos

La siguiente propiedad que analizaremos es la regla de la potencia para logaritmos.

Regla de la potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces

$$\log_a x^n = n \log_a x \qquad \textbf{Propiedad 3}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplos de la propiedad 3

$$\log_2 4^3 = 3 \log_2 4$$

$$\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$$

$$\log_5 \sqrt{12} = \log_5 (12)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_5 12$$

$$\log_8 \sqrt[5]{z+3} = \log_8 (z+3)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_8 (z+3)$$

Las propiedades 2 y 3 pueden demostrarse de una forma análoga a la que se explicó respecto de la propiedad 1 (vea los ejercicios 79 y 80 de la página 623).

EJEMPLO 1 ▸ Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

a) $\log_8 \frac{29}{43}$ **b)** $\log_4 (64 \cdot 180)$ **c)** $\log_{10} (22)^{1/5}$

Solución

a) $\log_8 \frac{29}{43} = \log_8 29 - \log_8 43$ *Regla del cociente.*

b) $\log_4 (64 \cdot 180) = \log_4 64 + \log_4 180$ *Regla del producto.*

c) $\log_{10} (22)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_{10} 22$ *Regla de la potencia.*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

A menudo tendremos que utilizar dos o más de estas propiedades en el mismo problema.

EJEMPLO 2 ▸ Desarrolle.

a) $\log_{10} 4(x+2)^3$ **b)** $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$

c) $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$ **d)** $\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{8}$

Solución

a) $\log_{10} 4(x+2)^3 = \log_{10} 4 + \log_{10}(x+2)^3$ — *Regla del producto.*

$= \log_{10} 4 + 3\log_{10}(x+2)$ — *Regla de la potencia.*

b) $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3} = \log_5 (4-a)^2 - \log_5 3$ — *Regla del cociente.*

$= 2\log_5(4-a) - \log_5 3$ — *Regla de la potencia.*

c) $\log_5 \left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2 = 2\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)$ — *Regla de la potencia.*

$= 2[\log_5(4-a) - \log_5 3]$ — *Regla del cociente.*

$= 2\log_5(4-a) - 2\log_5 3$ — *Propiedad distributiva.*

d) $\log_5 \dfrac{[x(x+4)]^3}{8} = \log_5 [x(x+4)]^3 - \log_5 8$ — *Regla del cociente.*

$= 3\log_5 x(x+4) - \log_5 8$ — *Regla de la potencia.*

$= 3[\log_5 x + \log_5(x+4)] - \log_5 8$ — *Regla del producto.*

$= 3\log_5 x + 3\log_5(x+4) - \log_5 8$ — *Propiedad distributiva.*

Ahora resuelva el ejercicio 21

Sugerencia útil

En el ejemplo 2**b)**, cuando desarrollamos $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, primero usamos la regla del cociente. En el ejemplo 2**c)**, cuando desarrollamos $\log_5 \left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, primero usamos la regla de la potencia. ¿Nota la diferencia entre ambos problemas? En $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, sólo el numerador del argumento está elevado al cuadrado; por lo tanto, primero utilizamos la regla del cociente. En $\log_5 \left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, todo el argumento está elevado al cuadrado, de modo que primero usamos la regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Escriba cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión.

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z$

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

Solución

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z = \log_8(z+2)^3 - \log_8 z$ — *Regla de la potencia.*

$= \log_8 \dfrac{(z+2)^3}{z}$ — *Regla del cociente.*

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

$= \log_7(x+1) + \log_7(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3$ — *Regla de la potencia.*

$= \log_7(x+1)(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3$ — *Regla del producto.*

$= \log_7 \dfrac{(x+1)(x+4)^2}{(x-5)^3}$ — *Regla del cociente.*

Ahora resuelva el ejercicio 39

Cómo evitar errores comunes

LAS REGLAS CORRECTAS SON

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Observe que:

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y \qquad \log_a xy \neq (\log_a x)(\log_a y)$$
$$\log_a (x - y) \neq \log_a x - \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos

Las últimas propiedades que analizaremos en esta sección se utilizarán para resolver ecuaciones en la sección 9.6.

Propiedades adicionales de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$\log_a a^x = x \qquad \textbf{Propiedad 4}$$
y
$$a^{\log_a x} = x\ (x > 0) \qquad \textbf{Propiedad 5}$$

Ejemplos de la propiedad 4	Ejemplos de la propiedad 5
$\log_6 6^5 = 5$	$3^{\log_3 7} = 7$
$\log_9 9^x = x$	$5^{\log_5 x} = x\ (x > 0)$

EJEMPLO 4 Evalúe. **a)** $\log_5 25$ **b)** $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$

Solución

a) $\log_5 25$ puede escribirse como $\log_5 5^2$ y, de acuerdo con la propiedad 4,

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

b) $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$ puede escribirse como $4^{\log_4 9}$. De acuerdo con la propiedad 5,

$$\sqrt{16}^{\,\log_4 9} = 4^{\log_4 9} = 9$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique la regla del producto para logaritmos.
2. Explique la regla del cociente para logaritmos.
3. Explique la regla de la potencia para logaritmos.
4. Explique por qué fue necesario indicar que x y y son números reales positivos cuando analizamos las reglas del producto y del cociente.
5. ¿Es verdadera la afirmación $\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$? Explique.
6. ¿Es verdadera la afirmación $\log_b (x + y + z) = \log_b x + \log_b y + \log_b z$? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

7. $\log_4 (3 \cdot 10)$
8. $\log_5 (4 \cdot 7)$
9. $\log_8 7(x + 3)$
10. $\log_9 x(x + 2)$
11. $\log_2 \frac{27}{11}$
12. $\log_5 (41 \cdot 9)$